

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

LÊ QUỐC CƯỜNG

**PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG
KẾT HỢP VỚI PHƯƠNG PHÁP PROPER GENERALIZED
DECOMPOSITION CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY
NHỚT KHÔNG NÉN ĐƯỢC QUA VẬT THỂ
BIÊN CỨNG VÀ BIÊN ĐÀN HỒI**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ
NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT**

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2019

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

LÊ QUỐC CƯỜNG

**PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG
KẾT HỢP VỚI PHƯƠNG PHÁP PROPER GENERALIZED
DECOMPOSITION CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY
NHỚT KHÔNG NÉN ĐƯỢC QUA VẬT THỂ
BIÊN CỨNG VÀ BIÊN ĐÀN HỒI
NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT - 9520101**

Hướng dẫn khoa học:

1. PGS. TS. Nguyễn Hoài Sơn
2. TS. Phan Đức Huỳnh

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 9 năm 2019

LÝ LỊCH CÁ NHÂN

I. LÝ LỊCH SƠ LƯỢC:

Họ & tên: LÊ QUỐC CUÔNG

Giới tính: Nam

Ngày, tháng, năm sinh: 21/9/1983

Nơi sinh: Tp. HCM

Quê quán: Thanh Hóa

Dân tộc: Kinh

Chỗ ở riêng hoặc địa chỉ liên lạc: 97/3/6, Phú Lợi, Thủ Dầu Một, Bình Dương

Điện thoại cơ quan: 0274.3822.460

Điện thoại nhà riêng: 0946.08.79.79

E-mail: lecuong2109@gmail.com

II. QUÁ TRÌNH ĐÀO TẠO:

1. Trung học chuyên nghiệp:

Hệ đào tạo:

Thời gian đào tạo từ/..... đến/

Nơi học (trường, thành phố):

Ngành học:

2. Đại học:

Hệ đào tạo: Chính quy

Thời gian đào tạo từ 9/2002 đến 5/2007

Nơi học (trường, thành phố): Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp. Hồ Chí Minh

Ngành học: Cơ điện tử

Tên đồ án, luận án hoặc môn thi tốt nghiệp: Mô hình Asima và các mặt nạ điều khiển

Ngày & nơi bảo vệ đồ án, luận án hoặc thi tốt nghiệp: 25/4/2007, trường Đại học Sư Phạm Kỹ thuật Tp. Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn: ThS. Nguyễn Quang Huy

3. Cao Học:

Hệ đào tạo: Chính quy

Thời gian đào tạo từ 9/2009 đến 9/2011

Nơi học (trường, thành phố): Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp. Hồ Chí Minh

Ngành học: Công nghệ Chế tạo máy

Tên đề án, luận án hoặc môn thi tốt nghiệp: Phân tích động lực học và điều khiển robot rắn.

Ngày & nơi bảo vệ đề án, luận án hoặc thi tốt nghiệp: 15/7/2011, trường Đại học Sư Phạm Kỹ thuật Tp. Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn: TS. Phan Đức Huỳnh

III. QUÁ TRÌNH CÔNG TÁC CHUYÊN MÔN KỂ TỪ KHI TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC:

Thời gian	Nơi công tác	Công việc đảm nhiệm
5/2007 – 12/2008	Trường Đào tạo Kỹ thuật Bình Dương	Giáo viên Cơ khí
01/9/2009 – 12/2009	Trường Đào tạo Kỹ thuật Bình Dương	Phó Trưởng Khoa Cơ khí
01/10/2010 – 11/2017	Trường trung cấp Nghề Việt-Hàn Bình Dương	Trưởng Khoa Cơ khí
11/2017 đến nay	Trường Cao đẳng Việt Nam – Hàn Quốc Bình Dương	Trưởng Khoa Cơ khí

Tp. Hồ Chí Minh, ngày 30 tháng 9 năm 2019
Nghiên cứu sinh

Lê Quốc Cường

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi.

Các số liệu, kết quả nêu trong Luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tp. Hồ Chí Minh, ngày 30 tháng 9 năm 2019

(Ký tên và ghi rõ họ tên)

Lê Quốc Cường

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, tôi xin chân thành cảm ơn đến thầy hướng dẫn chính của tôi là PGS. TS. Nguyễn Hoài Sơn. Thầy đã luôn động viên và định hướng cho tôi trong suốt quá trình thực hiện luận án.

Tôi cũng thật sự biết ơn đến thầy hướng dẫn thứ hai là TS. Phan Đức Huỳnh. Thầy đã định hướng nghiên cứu, cung cấp tài liệu và theo sát quá trình nghiên cứu của tôi.

Tiếp theo, tôi xin chân thành cảm ơn đến quý thầy cô tại Khoa Xây dựng và Phòng Đào tạo đã hỗ trợ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp. Hồ Chí Minh. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn quý thầy cô và các bạn nghiên cứu viên trong nhóm nghiên cứu GACES đã trao đổi, động viên và đóng góp ý kiến để tôi hoàn thành luận án của mình.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến gia đình, người thân và tất cả bạn bè của tôi, những người đã tin tưởng và luôn động viên tinh thần cho tôi trong suốt khoảng thời gian thực hiện luận án.

Tp. Hồ Chí Minh, Ngày 30 tháng 9 năm 2019
Nghiên cứu sinh

Lê Quốc Cường

CÁC KẾT QUẢ ĐÃ CÔNG BỐ

Chương 2:

1. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huỳnh và Nguyễn Bá Duy, “Giải phương trình 3D Biharmonic bằng phương pháp PGD kết hợp HOCFD,” *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam*.

2. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Nguyễn Bá Duy và Phan Đức Huỳnh, “Phương pháp PGD kết hợp HOCFD cho bài toán tấm mỏng chịu uốn,” *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam*.

Chương 3:

1. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huỳnh, “Phương pháp Proper Generalized Decomposition cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua một miền vuông,” *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, 2015, 45-52, ISBN: 978-604-84-1272-2*.

2. Huynh, P.D., **Cuong, L.Q**, “The numerical simulation of heat transfer and fluid flow problems by using the proper generalized decomposition method,” *Proceedings of the 2012 International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD2012), HoChiMinh City, Vietnam, 35-39, 2012*.

Chương 4:

1. **C. Le-Quoc**, Linh A. Le, V. Ho-Huu, P. D. Huynh, and T. Nguyen-Thoi, “An Immersed Boundary Proper Generalized Decomposition (Ib-Pgd) for Fluid–Structure Interaction Problems,” *International Journal of Computational Methods*, (2017), 1850045. (ISI)

2. **Lê Quốc Cường**, Phan Đức Huỳnh, Nguyễn Hoàng Sơn, “Mô phỏng dòng chảy nhớt không nén qua trụ tròn bằng phương pháp biên nhúng kết hợp PGD,” *Tạp chí Khoa học và Công nghệ các trường Đại học kỹ thuật*, 2014 (102), 101-105.

3. **Cuong, L.Q**, Huynh, P.D, “Numerically study effectiveness of control surface on aerodynamic of bridge deck by using immersed boundary method,” *Proceedings of the 2012 International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD2012), HoChiMinh City, Vietnam, 1-5, 2012.*

4. **Lê Quốc Cường**, Phan Đức Huỳnh, Nguyễn Hoài Sơn và Nguyễn Bá Duy, “Phương pháp IB-PGD dựa trên sơ đồ sai phân bậc hai trên lưới không đều cho các bài toán tương tác rắn – lỏng,” *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam.*

Chương 5:

1. **Cuong Q. Le**, H. Phan-Duc, Son H. Nguyen, “Immersed Boundary Method Combined With Proper Generalized Decomposition For Simulation Of A Flexible Filament In A Viscous Incompressible Flow,” *Vietnam Journal of Mechanics*, 2017 (2), 109-119, ISSN: 0866-7136.

2. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huỳnh, “Mô phỏng số tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với sợi đàn hồi bằng phương pháp Proper Generalized Decomposition kết hợp với phương pháp biên nhúng,” *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, 2015, 35-44, ISBN: 978-604-84-1272-2.*

TÓM TẮT

Luận án đã phát triển phương pháp biên nhúng (Immersed boundary – IB) kết hợp với phương pháp tách biến Proper Generalized Decomposition (PGD) để giải các bài toán tương tác rắn-lỏng (Fluid structure interaction – FSI). Mục tiêu chính của luận án là phát triển một phương pháp hiệu quả để giải quyết các bài toán FSI. Trước tiên, phương pháp đã đề xuất sử dụng phương pháp IB để xử lý sự hiện diện của vật cản trong miền lưu chất bằng cách thay thế ảnh hưởng của vật cản bằng một thành phần lực cưỡng bức tác động lên miền lưu chất, khi đó miền tính toán xem như chỉ còn một miền lưu chất đơn nhất. Vì vậy, quá trình chia lưới sẽ đơn giản đi rất nhiều và không cần phải thực hiện lại sau mỗi bước thời gian đối với các bài toán vật cản có biên di chuyển trong miền lưu chất. Bên cạnh đó, để gia tốc cho quá trình tính toán và tiết kiệm bộ nhớ chương trình, phương pháp PGD được đề xuất để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng. Phương pháp PGD giải quyết các bài toán trên không gian đa chiều dựa trên nguyên lý đưa các phương trình vi phân đạo hàm riêng đa chiều về việc giải các phương trình vi phân một chiều.

Luận án đã đề xuất áp dụng phương pháp PGD để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng trong không gian hai chiều và ba chiều. Tiếp theo, phương pháp PGD được đề xuất áp dụng vào các bài toán dòng chảy nhớt không nén ở các điều kiện biên khác nhau. Sau cùng, luận án đã đề xuất việc kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén được qua vật thể biên cứng và biên đàn hồi. Các kết quả tính toán từ phương pháp đề xuất đã cho thấy sự hiệu quả và một hướng đi đầy hứa hẹn trong việc giải các bài toán về tương tác rắn lỏng.

ABSTRACT

The thesis has developed the immersed boundary method (IBM) combined with the separation method of Proper Generalized Decomposition (PGD) to solve fluid-structure interaction problems. The primary goal of the thesis is to develop an effective method to solve the problem of incompressible viscous flow past rigid and elastic obstacles. Firstly, the method has proposed using IBM to handle the effect of obstacles in the fluid domain by replacing the effect of obstacles by a forced force component acting on the fluid domain, when that computational domain is considered as a single fluid domain. Therefore, the meshing process is much simpler and do not need to be repeated after every time step for problems with boundary movement in the fluid domain. Besides, to accelerate the computational process and save the program memory, PGD method is proposed to solve the partial differential equations. The PGD method which solves multi-dimensional spatial problems is based on the principle that transforms multi-dimensional partial differential equations into one-way differential equations.

The thesis has proposed the application of PGD method to solve partial differential equations in two-dimensional and three-dimensional space. Next, the PGD method has been proposed to apply to incompressible viscous fluid flow problems at different boundary conditions. Finally, the thesis has proposed to combine the IBM with PGD method to solve the incompressible viscous flow problems past rigid and elastic obstacles. The calculated results from the proposed method have shown the effectiveness and promising direction in solving problems of fluid-structure interaction.

MỤC LỤC

	TRANG
Trang tựa	
Lý lịch cá nhân	i
Lời cam đoan	iii
Cảm tạ	iv
Các kết quả đã công bố	v
Tóm tắt	vii
Mục lục	ix
Danh sách các chữ viết tắt	xiii
Danh sách các hình	xv
Danh sách các bảng	xx
Chương 1: TỔNG QUAN	1
1.1. Đặt vấn đề	1
1.2. Tổng quan về phương pháp IB	3
1.2.1. Phương pháp IB cổ điển	3
1.2.2. Phương pháp IB cường bức trực tiếp	5
1.2.3. Phương pháp IB chiếu	8
1.2.4. Phương pháp IB ô ảo	8
1.2.5. Phương pháp IB cắt ô	10
1.2.6. Phương pháp mặt phân cách nhúng	11
1.2.7. Phương pháp IB trên các biên không cơ bản	11
1.3. Tổng quan về phương pháp PGD	12
1.4. Nhận xét	13
1.5. Mục tiêu nghiên cứu	14
1.6. Phạm vi nghiên cứu	14
1.7. Phương pháp nghiên cứu	14
1.8. Tính mới của luận án	15
1.9. Bố cục luận án	15

Chương 2: PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠO HÀM RIÊNG	17
2.1. Giới thiệu	17
2.2. Phương pháp PGD cho phương trình vi phân đạo hàm riêng	18
2.2.1. Cơ sở lý thuyết của phương pháp PGD	18
2.2.2. Phương pháp PGD cho phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao	20
2.2.2.1. Phương trình Poisson	20
2.2.2.2. Phương trình Biharmonic	26
2.2.3. Sơ đồ sai phân hữu hạn cho phương trình vi phân một chiều	31
2.3.4. Ví dụ minh họa	33
2.3. Kết luận	46
Chương 3: PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN	48
3.1. Giới thiệu	48
3.2. Hệ phương trình Navier – Stokes cho bài toán dòng chảy nhớt không nén	48
3.3. Phương pháp chiếu	49
3.4. Rời rạc không gian	51
3.4.1. Lưới so le	51
3.4.2. Xấp xỉ đạo hàm	52
3.4.2.1. Đạo hàm bậc hai	52
3.4.2.2. Đạo hàm bậc nhất	53
3.4.2.3. Đạo hàm của các thành phần phi tuyến (theo sơ đồ sai phân trung tâm)	54
3.4.2.4. Đạo hàm các thành phần phi tuyến (theo sơ đồ sai phân ngược)	55
3.5. Điều kiện biên	57
3.6. Giải phương trình Poisson áp suất	59
3.7. Giải thuật tổng quát	64
3.8. Kết quả mô phỏng số	66
3.8.1. Bài toán Lid-driven cavity flow	66

3.8.2. Bài toán Backward-facing step flow	76
3.9. Kết luận	82
Chương 4: PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG KẾT HỢP VỚI PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN QUA VẬT CẢN BIÊN CỨNG	84
4.1. Giới thiệu	84
4.2. Hệ Phương trình chuyển động	85
4.3. Phương pháp số	86
4.3.1. Phương pháp chiếu	87
4.3.2. Xác định thành phần lực cưỡng bức \mathbf{f}	89
4.3.3. Rời rạc không gian	91
4.3.4. Giải phương trình Poisson	92
4.4. Giải thuật tổng quát	92
4.5. Kết quả mô phỏng số	95
4.5.1. Bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán	95
4.5.2. Bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định	98
4.5.3. Bài toán trụ tròn dao động trục tuyến trong một miền lưu chất tĩnh	111
4.5.4. Bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do	115
4.6. Kết luận	119
Chương 5: PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG KẾT HỢP VỚI PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN QUA VẬT CẢN BIÊN ĐÀN HỒI	122
5.1. Giới thiệu	122
5.2. Hệ phương trình chuyển động	122
5.3. Lực trên biên đàn hồi	124
5.3.1. Lực kéo	124
5.3.2. Lực uốn	126
5.4. Phương pháp số	129
5.4.1. Lực kéo và lực uốn	129

5.4.1.1. Lực kéo tại các điểm trên biên nhúng	129
5.4.1.2. Lực uốn tại các điểm trên biên nhúng	130
5.5. Giải thuật tổng quát	133
5.6. Kết quả mô phỏng số	136
5.6.1. Bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi	136
5.6.2. Bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với hai sợi đàn hồi	143
5.6.3. Bài toán sợi đàn hồi khép kín trong miền lưu chất tĩnh	151
5.7. Kết luận	156
Chương 6: KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	158
6.1. Kết luận	158
6.2. Kiến nghị	160
TÀI LIỆU THAM KHẢO	161
PHỤ LỤC	179

DANH SÁCH CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Các chữ viết tắt

IBM	Immersed boundary method (phương pháp biên nhúng)
PGD	Proper Generalized Decomposition
FSI	Fluid-structure interaction (tương tác rắn lỏng)

Ký hiệu khoa học

t	Thời gian
\mathbf{u}	Véc tơ vận tốc
u	Thành phần vận tốc theo phương ngang
v	Thành phần vận tốc theo phương đứng
ρ	Khối lượng riêng của lưu chất
p	Áp suất của lưu chất
μ	Độ nhớt động lực học
ω	Xoáy
ψ	Hàm dòng
\mathbf{U}_b	Vận tốc của biên nhúng
U	Thành phần vận tốc theo phương ngang của biên nhúng
V	Thành phần vận tốc theo phương đứng của biên nhúng
\mathbf{F}	lực biên nhúng trên lưới Lagrange
F_x	Lực cản
F_y	Lực nâng
C_d	Hệ số cản
C_l	Hệ số nâng
\mathbf{f}	Lực khối tác dụng lên lưu chất trên lưới Euler
\mathbf{g}	Véc tơ gia tốc trọng trường

Re	Hệ số Reynolds
St	Hệ số Strouhal
KC	Hệ số Keulegan-Carpenter
\mathbf{u}^*	Vận tốc trung gian của lưu chất
\mathbf{u}^{n+1}	Vận tốc của lưu chất ở bước thời gian $n + 1$
ρ_s	Khối lượng riêng của sợi đàn hồi
x_c	tọa độ trọng tâm theo phương x của vật rắn
y_c	Tọa độ trọng tâm theo phương y của vật rắn
\mathbf{n}	Véc tơ pháp tuyến đơn vị
$\boldsymbol{\tau}$	Véc tơ tiếp tuyến đơn vị

DANH SÁCH CÁC HÌNH

HÌNH	TRANG
Hình 1.1: Sơ đồ nội suy vận tốc cục bộ của Fadlun và cộng sự	6
Hình 1.2: Phương pháp ô ảo của Mittal cùng cộng sự: (a) Xác định điểm ô ảo, điểm ảnh và điểm cắt biên; (b) Các ô mới được sinh ra do sự chuyển động của biên	9
Hình 1.3: Sơ đồ tái tạo lại hình dáng các ô cắt gần biên nhúng	10
Hình 2.1: Lời giải PGD của phương trình (2.50) với 100 điểm lưới trên mỗi chiều	35
Hình 2.2: Lời giải PGD của phương trình (2.52) với 64 điểm lưới trên mỗi chiều	37
Hình 2.3: Sai số $ u_{PGD} - u_{ex} $ của lời giải PGD cho phương trình (2.52) với 64 điểm lưới trên mỗi chiều	38
Hình 2.4: Lời giải PGD cho tấm mỏng với điều kiện biên gờ tựa đơn ở bốn cạnh của tấm với 100 điểm lưới trên mỗi chiều	40
Hình 2.5: Lời giải PGD cho tấm mỏng với điều kiện biên ngàm ở bốn cạnh của tấm với 100 điểm lưới trên mỗi chiều	42
Hình 2.6: Lời giải PGD cho phương trình (2.64) với 64 điểm lưới trên mỗi chiều	44
Hình 2.7: Sai số $ u - u_{ex} $ của lời giải PGD cho phương trình (2.64) với 64 điểm lưới trên mỗi chiều	45
Hình 3.1: Lưới so le	52
Hình 3.2: Sơ đồ giải thuật phương pháp PGD cho phương trình Poisson áp suất trong không gian hai chiều	63
Hình 3.3: Sơ đồ giải thuật phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén	65
Hình 3.4: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán Lid-driven cavity flow	67
Hình 3.5: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 100$	69
Hình 3.6: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 400$	70
Hình 3.7: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 1000$	71
Hình 3.8: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 3200$	72

Hình 3.9: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 5000$	73
Hình 3.10: So sánh vận tốc theo chiều trục x dọc theo đường thẳng $x = 0.5$ ở các hệ số $Re = 100, Re = 400, Re = 1000, Re = 3200$ và $Re = 5000$	74
Hình 3.11: So sánh vận tốc theo chiều trục y dọc theo đường thẳng $y = 0.5$ ở các hệ số $Re = 100, Re = 400, Re = 1000, Re = 3200$ và $Re = 5000$	74
Hình 3.12: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán Lid-driven cavity	75
Hình 3.13: Thời gian tính toán của bài toán Lid-driven cavity ở hệ số $Re = 100$	76
Hình 3.14: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán Backward-facing step flow	77
Hình 3.15: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 100$	78
Hình 3.16: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 200$	78
Hình 3.17: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 300$	79
Hình 3.18: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 400$	79
Hình 3.19: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 500$	79
Hình 3.20: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 600$	80
Hình 3.21: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 700$	80
Hình 3.22: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 800$	80
Hình 3.23: So sánh chiều dài vùng xoáy của bài toán Backward-facing step flow	81
Hình 3.24: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 100$	82
Hình 4.1: Hệ lưu chất-kết cấu đơn giản và lưới rời rạc Euler (đánh dấu sáng) và lưới Lagrange (đánh dấu tối)	86
Hình 4.2: Phân bố lực cưỡng bức từ một điểm trên biên nhúng đến các điểm lưới lân cận và nội suy vận tốc ở một điểm khác trên biên nhúng	89
Hình 4.3: Lưới so le với áp suất và các thành phần vận tốc được xác định tại các vị trí khác nhau	92

Hình 4.4: Sơ đồ giải thật kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng	94
Hình 4.5: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán	95
Hình 4.6: Đường dòng của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán	96
Hình 4.7: Thành phần vận tốc theo phương ngang u ở vị trí $x=0.5$ của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán	97
Hình 4.8: Thành phần vận tốc theo phương đứng v ở vị trí $y=0.5$ của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán	97
Hình 4.9: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán	98
Hình 4.10: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định	99
Hình 4.11: Đường dòng của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$	101
Hình 4.12: Phân bố áp suất cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$	102
Hình 4.13: Đường bao xoáy cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$	103
Hình 4.14: Đường bao xoáy và phân bố áp suất cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số Reynolds $Re = 100$	105
Hình 4.15: Đường bao xoáy và phân bố áp suất cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số Reynolds $Re = 200$	106
Hình 4.16: Hệ số nâng C_l và hệ số cản C_d theo thời gian cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 100$	107
Hình 4.17: Hệ số nâng C_l và hệ số cản C_d theo thời gian cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 200$	108
Hình 4.18: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 100$	110
Hình 4.19: So sánh thời gian tính toán của phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán dòng chảy qua trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 100$	111
Hình 4.20: Điều kiện biên và miền tính toán của bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh	112
Hình 4.21: Áp suất cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh ở các thời điểm khác nhau: $\phi = 2\pi ft = 0^\circ, 96^\circ, 192^\circ, 288^\circ$	113

Hình 4.22: Xoáy cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh ở các thời điểm khác nhau: $\phi = 2\pi ft = 0^\circ, 96^\circ, 192^\circ, 288^\circ$	114
Hình 4.23: Đồ thị lực cản trong một chu kỳ dao động cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh	115
Hình 4.24: Điều kiện biên cho bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do	116
Hình 4.25: Trường xoáy tức thời của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do ở các tần số $f_e = 0.8f_s$ và $f_e = 1.1f_s$	117
Hình 4.26: Đồ thị lực nâng và lực cản của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do ở các tần số $f_e = 0.8f_s$ và $f_e = 1.1f_s$	118
Hình 5.1: Hệ lưu chất – biên nhúng đàn hồi	122
Hình 5.2: Hệ tọa độ Lagrange cho biên đàn hồi	129
Hình 5.3: Sơ đồ giải thật kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi	135
Hình 5.4: Dòng chảy nhớt không nén qua một sợi đàn hồi	136
Hình 5.5: Một sợi đàn hồi không khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở thời điểm $t = 0.5$ s. Hình trái: trường áp suất; hình phải: đường bao xoáy	137
Hình 5.6: Đường bao xoáy quanh một sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau	139
Hình 5.7: Trường áp suất quanh một sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau	140
Hình 5.8: Tọa độ theo phương x của đầu tự do sợi đàn hồi	141
Hình 5.9: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi	142
Hình 5.10: So sánh thời gian tính toán của phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi	143
Hình 5.11: Dòng chảy nhớt không nén qua hai sợi đàn hồi	144
Hình 5.12: Đường bao xoáy quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau với $d = 0.1L$	146
Hình 5.13: Trường áp suất quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau với $d = 0.1L$	147
Hình 5.14: Tọa độ đầu tự do theo phương x của hai sợi đàn hồi như một hàm theo thời gian với $d = 0.1L$	148

Hình 5.15: Đường bao xoáy quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau với $d = 0.3L$	149
Hình 5.16: Trường áp suất quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau với $d = 0.3L$	150
Hình 5.17: Tọa độ đầu tự do theo phương x của hai sợi đàn hồi như một hàm theo thời gian với $d = 0.3L$	151
Hình 5.18: Cấu trúc ban đầu và trạng thái cân bằng của màng đàn hồi	152
Hình 5.19: Trường vận tốc và biên dạng của màng đàn hồi ở các thời điểm khác nhau	154
Hình 5.20: Phân bố áp suất xung quanh màng đàn hồi ở các thời điểm khác nhau	155

DANH SÁCH CÁC BẢNG

BẢNG	TRANG
Bảng 2.1: Sai số và thời gian tính toán của lời giải PGD cho phương trình (2.50)	35
Bảng 2.2: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho phương trình (2.52)	39
Bảng 2.3: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho bài toán tấm mỏng chịu uốn với điều kiện biên gối tựa đơn ở bốn cạnh của tấm	41
Bảng 2.4: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho bài toán tấm mỏng với điều kiện biên ngàm ở bốn cạnh của tấm	43
Bảng 2.5: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho phương trình (2.64)	46
Bảng 3.1: Tọa độ tâm xoáy trung tâm của bài toán Lid-driven cavity flow ở các hệ số Reynolds khác nhau	67
Bảng 4.1: Chiều dài vùng xoáy và hệ số cản ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$	104
Bảng 4.2: Hệ số cản C_D , hệ số nâng C_L và số St ở hệ số $Re = 100$ và $Re = 200$	109
Bảng 4.3: Bảng so sánh lực cản trung bình và biên độ dao động của lực nâng và lực cản của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do ở các tần số dao động $f_e = 0.8f_s$ và $f_e = 1.1f_s$	119
Bảng 5.1: Thông số mô phỏng của bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi	137
Bảng 5.2: Thông số mô phỏng của bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với hai sợi đàn hồi	144
Bảng 5.3: So sánh sự mất mát diện tích tính toán của màng đàn hồi ở thời điểm $t = 0.020$ s	153

Chương 1

TỔNG QUAN

1.1. Đặt vấn đề

Bài toán tương tác rắn-lỏng (fluid-structure interaction – FSI) là một trong những bài toán được quan tâm trong lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Các bài toán FSI có thể được tìm thấy trong các lĩnh vực như khí động lực học cầu [1, 2], dao động của cánh turbine gió [3-5], tác động của gió lên các tòa nhà cao tầng [6, 7], đáp ứng khí động học của máy bay [8], tương tác giữa gió với cây xanh [9] và nhiều bài toán về dòng chảy sinh học như tương tác giữa máu với van tim [10, 11], các bài toán mô phỏng quá trình bay và bơi của sinh vật [12, 13] ...

Do các bài toán FSI là các bài toán vật lý tương tác đa trường nên việc giải quyết các bài toán nói trên sẽ rất khó để thực hiện bằng các phương pháp giải tích, thay vào đó, các bài toán FSI thường được giải bằng các phương pháp số. Nhiều phương pháp số để giải bài toán FSI đã được đề xuất và phát triển trong những năm qua như phương pháp Newton-Raphson [14-16], phương pháp Euler-Lagrang [17, 18], phương pháp meshfree [19], phương pháp phần tử hữu hạn tron [20-23], phương pháp Lattice Boltzmann [24]... Tuy nhiên, để giải quyết vấn đề lưới tương thích trong các bài toán FSI có sự di chuyển hoặc biến dạng của vật thể trong dòng lưu chất thì chi phí tính toán của các phương pháp nói trên là rất cao. Trong bối cảnh đó, phương pháp biên nhúng (Immersed boundary-IB) là một công cụ hữu hiệu cho các bài toán có biên di chuyển hoặc miền tính toán phức tạp. Phương pháp IB giải quyết các bài toán FSI trên cơ sở thay thế ảnh hưởng của vật cản trong dòng lưu chất bằng cách đưa vào một thành phần lực tác động lên dòng chảy thông qua một hàm phân bố dirac delta, khi đó miền tính toán xem như là một miền lưu chất đồng nhất và các chi phí chia lại lưới sau mỗi bước thời gian sẽ được loại bỏ.

Tuy nhiên, các bài toán FSI trong không gian hai chiều hay ba chiều khi được giải bằng phương pháp IB dựa trên các phương pháp số truyền thống (sai phân hữu hạn, phần tử hữu hạn hay thể tích hữu hạn ...) thì việc chia lưới trên toàn miền tính toán sẽ đòi hỏi số biến lưới rất lớn. Điều này dẫn đến các vấn đề như mất nhiều thời gian tính toán, sự phức tạp trong các giải thuật chia lưới, cũng như nguồn tài nguyên lưu trữ phải lớn. Ví dụ, chúng ta xét bài toán một chiều, với lời giải số là phương pháp phần tử hữu hạn với số phần tử trên mỗi chiều là 100. Nếu mở rộng mô hình bài toán sang hai chiều, thì lưới tính toán khi đó sẽ là 100×100 phần tử. Tương tự, với bài toán ba chiều thì số phần tử sẽ là 100^3 . Một cách để giảm thời gian tính toán và bộ nhớ chương trình khi giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng đó là sử dụng nhóm các phương pháp tìm kiếm lời giải của bài toán ở dạng tách biến với tên gọi giảm bậc mô hình (Reduced-Order models – ROM). Trong số đó, phương pháp Proper generalized decomposition (PGD) được đề xuất bởi Ammar cùng cộng sự [25, 26] là một phương pháp hiệu quả và đầy hứa hẹn. Phương pháp PGD tìm kiếm lời giải của bài toán đa chiều bằng cách đưa bài toán đa chiều thành chuỗi các bài toán một chiều để giải quyết.

Bằng cách khai thác những thuận lợi của cả hai phương pháp IB và PGD, mục tiêu của luận án là kết hợp phương pháp IB và phương pháp PGD để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua các vật thể biên cứng [27] và biên đàn hồi [28]. Trong sự kết hợp này, các công thức của phương pháp IB được sử dụng để xây dựng sự tương tác giữa lưu chất và kết cấu bằng cách đưa một thành phần lực cưỡng bức vào hệ phương trình Navier-Stokes. Sau đó, phương pháp PGD được sử dụng để tìm kiếm lời giải của hệ phương trình Navier-Stokes. Bằng cách thực hiện này, các ưu điểm của phương pháp IB và PGD sẽ được khai thác một cách hiệu quả. Các công thức biên nhúng giúp xử lý biên phức tạp của bài toán FSI trong khi phương pháp PGD giúp tăng tốc độ tính toán và làm giảm sự phức tạp của các bài toán đa chiều.

1.2. Tổng quan về phương pháp IB

Phương pháp IB lần đầu tiên được đề xuất vào năm 1977 bởi Peskin [29] để phân tích ứng xử của dòng máu tương tác với van tim. Từ đó, phương pháp IB đã được sử dụng để giải quyết cho các loại bài toán FSI khác nhau như Kim & Choi [30] đã phát triển phương pháp IB để phân tích dòng chảy qua một vật cản di chuyển, Miller cùng các cộng sự [31] và Pan cùng cộng sự [32] đã sử dụng phương pháp IB để mô phỏng quá trình bay của các loại côn trùng nhỏ ở hệ số Reynolds thấp. Shoele & Zhu [33] đã giải quyết bài toán dao động và biến dạng của vật thể trong dòng chảy đều, ... Gần đây, phương pháp IB cũng đã phát triển để giải quyết các bài toán dòng chảy qua vật cản [34-36]. Nhiều nghiên cứu sâu về phương pháp IB cũng được đề cập trong các công bố của Zhu & Peskin [37-41]. Những đánh giá tổng quan gần đây về phương pháp IB có thể tìm thấy trong các công bố của Iaccarino & Verzicco [42], Mittal & Iaccarino [43] và Sotiropoulos & Yang [11].

1.2.1. Phương pháp IB cổ điển

Phương pháp IB cổ điển lần đầu tiên được giới thiệu bởi Peskin [29] để mô phỏng dòng máu qua van tim. Trong phương pháp IB cổ điển, lực ở biên nhúng được tính dựa vào cấu trúc của biên nhúng và có thể được trình bày như sau

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = M(\mathbf{X}, t) \quad (1.1)$$

ở đây \mathbf{X} là vị trí các điểm biên nhúng trên hệ tọa độ Đề các, M là một toán tử mô tả thuộc tính của biên. Lực tại các điểm trên biên sau đó được phân bố đến các ô lưới lưu chất xung quanh bằng một hàm rời rạc dela δ_h

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_s \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}) ds \quad (1.2)$$

Trong phương pháp IB cổ điển, lực được đưa vào lời giải hệ phương trình Navier-Stokes trước quá trình rời rạc hóa. Vì vậy, phương pháp này được phân loại thành nhóm cưỡng bức liên tục như trong công bố của Mittal & Iaccarino [43].

Để giải quyết các bài toán dòng chảy qua vật cản biên cứng, Beyer & LeVeque [44] và Lai & Peskin [45] đã sử dụng một lò xo ảo để ràng buộc vật rắn với một vị trí cân bằng $\mathbf{X}^e(s, t)$, khi đó lực tại các điểm trên biên được tính như sau

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \kappa(\mathbf{X}^e(s, t) - \mathbf{X}(s, t)) \quad (1.3)$$

ở đây κ là hằng số độ cứng. Tuy nhiên, để áp đặt điều kiện biên một cách chính xác, giá trị của κ cần phải rất lớn.

Bên cạnh đó, Goldstein cùng cộng sự [46] và Saiki & Biringen [47] đã sử dụng một giải thuật cưỡng bức hồi tiếp để tính lực trên biên nhúng như sau

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = -\alpha \int_0^t (\mathbf{U}(\mathbf{X}, \tau) - \mathbf{U}_b(\mathbf{X}, \tau)) d\tau - \beta (\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{U}_b(\mathbf{X}, t)) \quad (1.4)$$

ở đây $\alpha \gg 1$ và $\beta \gg 1$ là hai hằng số nhân tạo mà thứ nguyên lần lượt là $1/T^2$ và $1/T$. Phương pháp này vận hành như một hệ của lò xo và giảm chấn để hiệu chỉnh $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ về $\mathbf{U}_b(\mathbf{X}, t)$.

Từ phương pháp ban đầu, các biến thể khác nhau của lớp phương pháp này đã được đề xuất để giải quyết bài toán dòng chảy qua vật thể biên cứng. Ví dụ, trong công bố của Angot cùng cộng sự [48] và Khadra cùng cộng sự [49] đã mô phỏng dòng chảy được giả sử trong một môi trường rỗng. Ngược lại, Glowinski cùng cộng sự [50] đã xây dựng phương pháp miền ảo hay phương pháp phân bố nhân tử Lagrange, trong đó xét vật rắn như là lưu chất chịu một sự ràng buộc cứng.

Bằng cách sử dụng kỹ thuật phần tử hữu hạn, phương pháp IB cổ điển được mở rộng thành phương pháp phần tử hữu hạn nhúng (Immersed finite element method) [51-53] và phương pháp nhúng liên tục (Immersed continuum method) [54] cho các bài toán dòng chảy qua vật thể biên cứng.

Các công bố trước đây về phương pháp này phần lớn được áp dụng cho bài toán dòng chảy qua biên đàn hồi và biên cứng đứng yên vì phương pháp này chưa được mở rộng cho trường hợp biên cứng di chuyển.

1.2.2. Phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp (Direct forcing immersed boundary method)

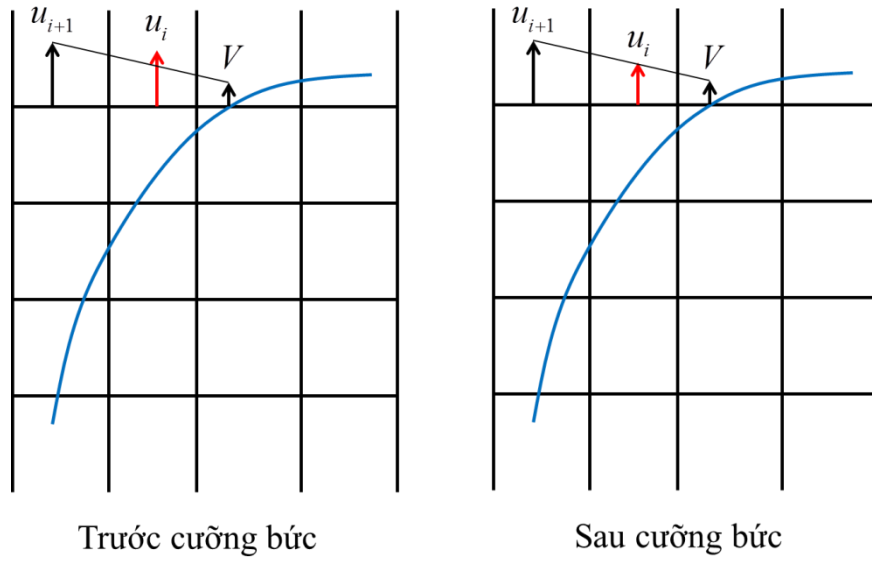
Phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp được đề xuất bởi Mohd-Yosuf [55] và Fadlun cùng cộng sự [56] cho những bài toán dòng chảy qua vật thể biên cứng thông qua việc hiệu chỉnh phương trình động lượng rời rạc. Phương pháp này được phân nhóm thành nhóm cưỡng bức rời rạc trong công bố của Mittall & Iaccarino [43]. Để đơn giản, phương trình động lượng rời rạc được viết lại như sau

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{RHS}^{n+1} + \mathbf{f}^{n+1}, \quad (1.5)$$

ở đây thành phần vế phải \mathbf{RHS}^{n+1} bao gồm các thành phần đối lưu, lực nhớt và gradient áp suất. Để dẫn đến một điều kiện biên đúng ở mặt phân cách Γ , thành phần lực được xác định như sau

$$\mathbf{f}^{n+1}|_{\Gamma} = \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad (1.6)$$

ở đây $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \mathbf{RHS}^{n+1} \Delta t$ là vận tốc được đánh giá ở mặt phân cách mà không xét đến ảnh hưởng của biên nhúng. Chúng ta thấy rằng, phương pháp cưỡng bức trực tiếp sử dụng sự tái cấu trúc lại vận tốc cục bộ để áp đặt điều kiện biên. Fadlun cùng cộng sự [56] đã so sánh nhiều sơ đồ nội suy và đạt được độ chính xác bậc hai sử dụng phép nội suy tuyến tính. Trong hình 1.1, vận tốc u_i ở điểm lưới đầu tiên bên ngoài vật rắn đạt được bằng phép nội suy tuyến tính vận tốc V ở biên và vận tốc u_{i+1} ở điểm lưới thứ hai.



Hình 1.1: Sơ đồ nội suy vận tốc cục bộ của Fadlun và cộng sự.

Phương pháp IB cường bức trực tiếp đã được phát triển và cải tiến bằng cách kết hợp với phương pháp cổ điển, vận tốc và lực trên lưới nền lưu chất và biên nhúng có thể được chuyển đổi bằng cách sử dụng hàm rời rạc delta của công thức cổ điển. Hai cách tiếp cận khác nhau đã được đề xuất để thực hiện điều này.

Cách tiếp cận thứ nhất, được gọi như là phương pháp IB cường bức trực tiếp hiện được đề xuất bởi Uhlmann [57] cho bài toán biên cứng di chuyển. Uhlmann đã đề xuất đánh giá lực ở các điểm lưới trên biên nhúng và phân bố lực đến các ô lưu chất bằng cách sử dụng hàm rời rạc delta được kế thừa từ phương pháp của Peskin [29]. Trong phương pháp này, các lực ở biên nhúng được tính toán trực tiếp bởi công thức sau

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_\Gamma) = \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_\Gamma) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_\Gamma)}{\Delta t}, \quad (1.7)$$

ở đây $\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_\Gamma)$ là vận tốc ở biên Γ , có thể được mô tả hoặc từ sự kết hợp với lời giải kết cấu và $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_\Gamma)$ được nội suy từ những nút lưới xung quanh.

Sơ đồ hiện này được sử dụng nhiều trong các công bố vì nó có chi phí tính toán không cao. Tuy nhiên điều kiện biên chính xác không thể đạt được trên mặt phân cách nhúng cho cả vận tốc cuối cùng $\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_\Gamma)$ và vận tốc trung gian $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{X}_\Gamma)$. Kempe & Fröhlich [58] đã cải thiện độ chính xác bằng cách thêm vào một vòng lặp cưỡng bức vào bước cưỡng bức biên nhúng.

Cách tiếp cận thứ hai, được xem như phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp ẩn được đề xuất bởi Su cùng cộng sự [59], lực ở biên nhúng đạt được bằng cách giải hệ phương trình sau

$$\sum_{\mathbf{X} \in \Gamma} \left(\sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}') \delta_h(\mathbf{x} - \mathbf{X}_\Gamma) \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{X} \right) \mathbf{f}(\mathbf{X}') = \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}_\Gamma) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_\Gamma)}{\Delta t} \quad (1.8)$$

Sự phân bố lực và nội suy vận tốc được kết hợp trong phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp ẩn, trong khi chúng được tách ra trong phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp hiện. Thuận lợi của phương pháp ẩn đó là các điều kiện biên vận tốc ở mặt phân cách được thỏa mãn chính xác hơn phương pháp hiện. Tuy nhiên, phương pháp này đòi hỏi tài nguyên tính toán lớn để giải hệ phương trình tuyến tính, điều đó có thể trở nên nghiêm trọng cho những bài toán với số nút biên nhúng lớn hoặc có nhiều vật thể nhúng trong lưu chất. Một phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp dựa trên rời rạc hàm dòng với lưới mịn cục bộ cũng đã được phát triển bởi Wang & Zhang [60].

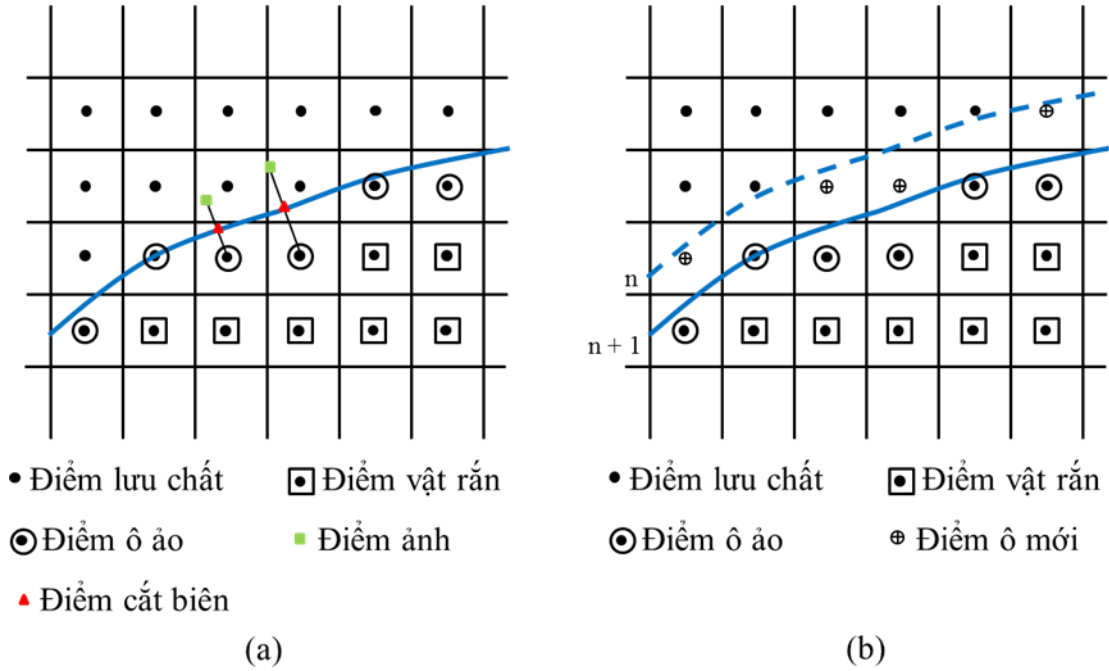
Hàm rời rạc delta là một thành phần quan trọng của cả phương pháp IB cổ điển và phương pháp IB cưỡng bức trực tiếp. Hàm rời rạc delta phải đảm bảo rằng tổng lực và moment vẫn không thay đổi khi chúng được phân bố từ biên nhúng đến những nút lưới lưu chất. Hàm rời rạc delta đơn giản nhất là hàm mũ hai điểm với chiều rộng bằng hai lần khoảng cách lưới. Một hàm bốn bước lưới tron được đề xuất bởi Peskin [61], trong khi hàm rời rạc delta ba bước lưới được đề xuất bởi Roma cùng cộng sự [62]. Các hàm rời rạc delta tron cũng đã được đề xuất bởi Yang cùng cộng sự [63], tác dụng của các hàm rời rạc delta tron là có thể loại bỏ các dao động lực phi vật lý khi áp dụng cho các bài toán có biên di chuyển.

1.2.3. Phương pháp IB chiếu (Immersed boundary projection method)

Để áp đặt điều kiện biên không trượt một cách chính xác, Taira & Colonius [64] đã đề xuất phương pháp IB chiếu. Bằng cách xét lực biên là một nhân tử Lagrange để thỏa mãn điều kiện biên không trượt trên biên nhúng, phương pháp biên nhúng kết hợp hai nhân tử Lagrange cho áp suất và lực biên thành một phương trình Poisson hiệu chỉnh và được giải bằng phương pháp chiếu của Perot [65]. Phương pháp này rất chính xác vì nó cưỡng bức điều kiện phân kỳ tự do và điều kiện biên không trượt một cách đồng thời trong bước chiếu. Tuy nhiên, phương pháp IB chiếu không đạt hiệu quả vì những lý do sau đây. Thứ nhất, một ma trận có kích thước lớn được tạo ra để dẫn đến phương trình Poisson hiệu chỉnh, điều này yêu cầu bộ nhớ của máy tính phải lớn khi giải quyết bài toán. Thứ hai, điều kiện số của phương trình Poisson áp suất ban đầu bị suy yếu nghiêm trọng do thuộc tính suy biến của các hàm nội suy và phân bố, điều này có thể dẫn đến các vấn đề về hội tụ [66]. Hơn nữa, đối với bài toán biên di chuyển, ma trận hệ số của phương trình Poisson hiệu chỉnh phải được tính lại ở mỗi bước thời gian, điều này làm gia tăng thời gian tính toán.

1.2.4. Phương pháp IB ô ảo (Ghost-cell immersed boundary method)

Tseng & Ferziger [67] và Mittal cùng cộng sự [68] đã mở rộng phương pháp của Mohd-Yosuf [55] và Fadlun cùng cộng sự [56] thông qua một phương pháp ô ảo. Trong phương pháp này, ô ảo được định nghĩa ở bên trong của biên nhúng để mỗi ô ảo có ít nhất một điểm lân cận trong miền lưu chất như hình 1.2. Biên dòng chảy cục bộ sau đó được biểu diễn thông qua một đa thức (tuyến tính hoặc bậc hai) và giá trị ô ảo có trọng số được tính bởi giá trị các điểm lưới lân cận.

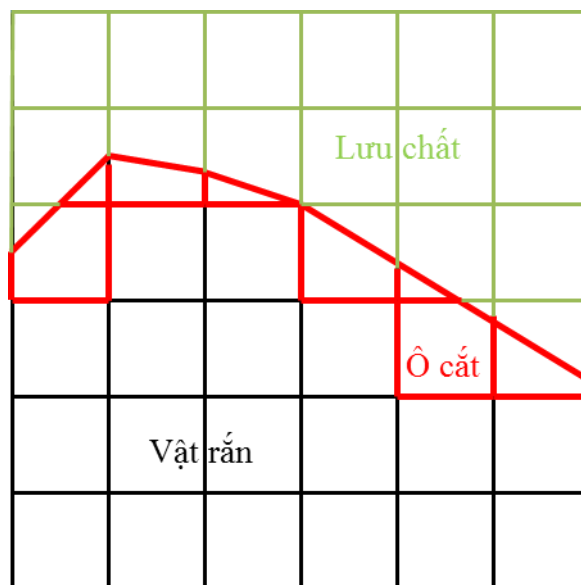


Hình 1.2: Phương pháp ô ảo của Mittal cùng cộng sự: (a) Xác định điểm ô ảo, điểm ảnh và điểm cắt biên; (b) Các ô mới được sinh ra do sự chuyển động của biên.

Phương pháp IB ô ảo áp đặt điều kiện biên ở vị trí chính xác của biên nhúng, vì vậy nó phù hợp cho các bài toán mô phỏng ở hệ số Reynolds cao. Tuy nhiên, sự bất ổn định số có thể gia tăng khi điểm biên gần với các nút lưới lưu chất, nguyên nhân bởi các trọng số âm lớn. Phương pháp điểm ảnh được sử dụng để khắc phục vấn đề này trong bài báo của Tseng & Ferziger [67] và Mittal cùng cộng sự [68] như trình bày ở hình 1.2a. Biến dòng chảy được đánh giá ở điểm ảnh và được chuyển đến ô ảo bằng phép ngoại suy. Một trường hợp khó khăn khác với phương pháp ô ảo được gọi là vấn đề “ô mới” [68]. Các ô mới ở trong vật rắn ở một bước thời gian và chuyển vào miền lưu chất ở bước thời gian tiếp theo do sự di chuyển của biên (xem hình 1.2b). Mittal cùng cộng sự [68] đã xử lý vấn đề này bằng việc nội suy vận tốc lưu chất từ các nút lân cận. Ngoài ra, việc nhận dạng các điểm cắt biên khá khó khăn với các miền vật lý phức tạp trong phương pháp IB ô ảo. Các điểm cắt biên không đúng có thể dẫn đến việc không hội tụ của bài toán.

1.2.5. Phương pháp IB cắt ô (Cut-cell immersed boundary method)

Trong phương pháp IB cắt ô, các ô lưu chất bị cắt bởi biên nhúng được xác định, và đường cắt của biên với những ô này được tính toán. Kế đến, các ô cắt có tâm nằm bên trong lưu chất được tái tạo lại hình dáng thành những ô khác như trình bày ở hình 1.3. Phương pháp này giữ lại được độ chính xác không gian bậc hai và dẫn đến một mặt phân cách rõ nét. Ye cùng cộng sự [69] đã đề xuất phương pháp IB cắt ô trên một lưới đồng vị (các biên dòng chảy được định nghĩa tại cùng một vị trí) sử dụng rời rạc sai phân hữu hạn để bảo toàn khối lượng và động lượng. Các công bố về việc áp dụng phương pháp này trên lưới lệch có thể tìm thấy trong [70-72]. Các bài toán biên di chuyển cũng được xét trong công bố của Udaykumar [73]. Hầu hết các ứng dụng của phương pháp cắt ô đều tập trung vào các bài toán 2D [69, 74-76]. Việc mở rộng phương pháp cho các bài toán ba chiều sẽ rất khó, do phương pháp cắt ô thường dẫn đến các ô đa giác phức tạp, điều đó dẫn đến việc rời rạc hệ phương trình Navier-Stokes trên các ô này sẽ rất khó khăn [43].



Hình 1.3: Sơ đồ tái tạo lại hình dáng các ô cắt gần biên nhúng.

1.2.6. Phương pháp mặt phân cách nhúng (Immersed interface method)

Phương pháp mặt phân cách nhúng lần đầu tiên được giới thiệu bởi LeVeque & Li [77] để cải thiện độ chính xác của phương pháp IB cổ điển ở gần biên nhúng. Sau đó, nó được mở rộng cho hệ phương trình Stokes [78] và hệ phương trình Navier-Stokes [79, 80]. Phương pháp mặt phân cách nhúng có ý tưởng tương tự như phương pháp IB cổ điển, trong đó ảnh hưởng của mặt phân cách nhúng lên lưu chất xung quanh được trình bày bởi các lực trên biên. Cho một nút lưới gần mặt phân cách nhúng, một sơ đồ sai phân hữu hạn chuẩn có thể sử dụng các giá trị của các nút lưới ở phía bên kia của mặt phân cách. Thay vì phân bố lực tại các điểm trên biên nhúng đến các nút lưới nên lưu chất như trong phương pháp IB cổ điển, phương pháp mặt phân cách nhúng đưa các điều kiện nhảy vào sơ đồ sai phân hữu hạn để tính ảnh hưởng của lực tại các điểm trên biên nhúng lên miền lưu chất.

Các điều kiện nhảy cho vận tốc, áp suất và các đạo hàm pháp tuyến của chúng qua mặt phân cách được trình bày bởi Lai & Li [81]. Sau đó, các điều kiện nhảy không gian và thời gian cho dòng chảy nhớt không nén được dẫn ra một cách có hệ thống bởi Xu & Wang [82] và được áp dụng cho các bài toán 2D [82] và 3D [83].

Các điều kiện nhảy là các hàm của lực trên biên nhúng. Với biên đàn hồi, lực trên biên có thể được tính dựa trên cấu trúc của biên nhúng. Với vật thể biên cứng, Xu & Wang [83] đã sử dụng phương pháp hồi tiếp để tính lực trên biên nhúng. Trong [84, 85], lực trên biên nhúng được tính bằng cách giải một hệ phương trình để cưỡng bức các điều kiện biên không trượt ở biên cứng.

1.2.7. Phương pháp IB trên các biến không cơ bản

Bên cạnh các phương pháp IB giải quyết các bài toán FSI dựa trên các biến vận tốc và áp suất (biến cơ bản), phương pháp IB cũng đã tích hợp thành công thành trong các công thức trên các biến không cơ bản (biến hàm dòng và xoáy) của dòng chảy. Ren cùng cộng sự [86] đã trình bày phương pháp IB trong công thức hàm dòng-xoáy. Điều kiện biên yêu cầu đạt được bằng cách hiệu chỉnh vận tốc và xoáy.

Mimeau cùng cộng sự [87] đã đề xuất một phương pháp IB phạt dựa trên lời giải vận tốc-xoáy cho lưu chất. Phương pháp IB dựa trên lời giải rời rạc hàm dòng cũng được đề xuất bởi Colonus & Taira [88] và Wang & Zhang [60]. Sự kết hợp của phương pháp Lattice Boltzmann và phương pháp IB đã thu được nhiều kết quả trong các công bố của Dupuis cùng cộng sự [89] và Favier cùng cộng sự [90]. Sơ đồ cường bức điều kiện biên trong phương pháp này được xét trong các công bố của Wu & Shu [91, 92] và Wang cùng cộng sự [93]. Mặc dù khá hiệu quả nhưng các công thức biến không cơ bản có thể sẽ gây khó khăn trong việc áp đặt các điều kiện biên. Vì các biến không cơ bản được định nghĩa từ các tổ hợp đạo hàm liên quan đến vận tốc (ω -xoáy: $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$; ψ - hàm dòng: $\partial \psi / \partial y = u$, $\partial \psi / \partial x = -v$) nên khi giải bài toán trên các biến các biến không cơ bản, chúng ta phải chuyển các điều kiện biên trên biến vận tốc sang điều kiện biên trên các biến không cơ bản.

1.3. Tổng quan về phương pháp PGD

Không giống như các phương pháp khác trong nhóm các phương pháp giảm bậc mô hình như Proper Orthogonal Decomposition [94-101], Centroidal Voronoi Tessellation [102, 103], ... phương pháp PGD có thể xây dựng dạng tách biến của lời giải mà không cần biết trước về dữ liệu trước khi tính toán. Vì vậy chi phí tính toán và sự phức tạp của lời giải PGD cho các bài toán đa chiều được giảm một cách đáng kể. Gần đây, phương pháp PGD đã được áp dụng để giải quyết các bài toán kỹ thuật như vật liệu composite [104-108], tối ưu hóa kết cấu [109], lưu chất [110, 111], hóa lượng tử [112] truyền nhiệt [113, 114], phân tích độ mỏi vật liệu [115], mô phỏng robot [116], năng lượng hạt nhân [117]. Tổng quan về phương pháp PGD có thể tìm thấy trong [118, 119]. Trong nhóm các bài toán về tương tác rắn-lỏng, phương pháp PGD cũng đã được áp dụng trong một vài nghiên cứu gần đây như trong công bố của Dumon cùng cộng sự [120] đã sử dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp thể tích hữu hạn để giải hệ phương trình Navier-Stokes cho cả bài toán dòng chảy ổn định và bất ổn định ở các hệ số Reynolds khác nhau, Dumon

cùng cộng sự [121] cũng đã kết hợp phương pháp PGD với phương pháp phổ để giải bài toán dòng chảy trên một miền vuông. Tuy nhiên, những công trình nghiên cứu về phương pháp PGD cho các bài toán FSI vẫn còn hạn chế và chủ yếu cho các bài toán có miền tính toán đơn giản, thường là miền tính toán hình chữ nhật và không có vật cản. Khi có vật cản đưa vào bài toán thì sự tương tác giữa lưu chất và kết cấu sẽ trở nên rất phức tạp do lưu chất không chỉ tương tác với biên pháp tuyến mà còn tương tác với vật cản. Phương pháp PGD sẽ giải rất nhanh các bài toán, nhưng để giải quyết hiệu quả các bài toán FSI với miền tính toán phức tạp thì việc xử lý các vấn đề về miền tính toán cần được thực hiện trước khi sử dụng phương pháp PGD để giải phương trình chuyển động của lưu chất.

1.4. Nhận xét

Phương pháp IB là một công cụ hiệu quả để giải quyết các bài toán FSI. Tuy nhiên, khi giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng, phương pháp IB được kết hợp với các phương pháp số truyền thống (phương pháp phân tử hữu hạn, thể tích hữu hạn, sai phân hữu hạn,...) đòi hỏi quá trình chia lưới phải được thực hiện trên toàn miền không gian (hai chiều hoặc ba chiều) của bài toán. Điều đó dẫn đến sự phức tạp khi xây dựng các ma trận hệ số trong việc giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng. Bên cạnh đó, đối với những bài toán yêu cầu độ chính xác cao, thì việc chia lưới trên toàn miền không gian bài toán đòi hỏi phải được thực hiện rất mịn. Vì vậy, việc làm mịn lưới sẽ mất nhiều thời gian tính toán và yêu cầu phải có không gian bộ nhớ của máy tính phải lớn.

Phương pháp PGD là một kỹ thuật tách biến mạnh mẽ thường được sử dụng cho các phương trình phi tuyến phức tạp. Phương pháp PGD có thể tách riêng các biến của bài toán và giải quyết độc lập nhờ đó có thể tăng tốc độ tính toán mà vẫn có thể giữ nguyên độ mịn của lưới. Vì vậy, phương pháp PGD có thể giải quyết các bài toán tương tác giữa lưu chất và kết cấu với ưu điểm vượt trội về mặt tốc độ tính toán và tiết kiệm bộ nhớ của máy tính.

Chính vì những ưu điểm và phạm vi ứng dụng rộng rãi của cả hai phương pháp PGD và phương pháp IB mà nghiên cứu sinh đã chọn hướng nghiên cứu phát triển phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén được qua vật thể biên cứng và biên đàn hồi.

1.5. Mục tiêu nghiên cứu

Nghiên cứu phương pháp số mô phỏng các bài toán dòng chảy nhớt không nén (trong trường hợp dòng chảy tầng ở hệ số Reynolds thấp) qua các vật cản biên cứng và biên đàn hồi được cụ thể hóa một số vấn đề như sau:

- Ứng dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn trong việc giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao.
- Ứng dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén với các điều kiện biên khác nhau.
- Phát triển phương pháp IB kết hợp phương pháp PGD giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng đứng yên và vật cản biên cứng di chuyển.
- Phát triển phương pháp IB kết hợp phương pháp PGD giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật thể biên đàn hồi.

1.6. Phạm vi nghiên cứu

- Luận án tập trung nghiên cứu giải thuật kết hợp phương pháp IB và phương pháp PGD cho các bài toán trong không gian hai chiều.
- Các bài toán tương tác rắn lỏng được khảo sát trong luận án là các bài toán dòng chảy nhớt không nén được với điều kiện là dòng chảy tầng (ở hệ số Reynolds thấp).

1.7. Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu tài liệu, các công bố khoa học về phương pháp IB và phương pháp PGD.

- Mô hình hóa các bài toán về tương tác rắn lỏng.
- Xây dựng chương trình mô phỏng sử dụng ngôn ngữ lập trình Matlab để khảo sát các bài toán.

1.8. Tính mới của luận án

- Phát triển phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn để giải quyết các bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao (phương trình Biharmonic, phương trình Poisson) trong không gian hai chiều và ba chiều.
- Ứng dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn giải bài toán dòng chảy nhớt không nén với các điều kiện biên khác nhau.
- Phát triển phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD mô phỏng bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật thể biên cứng đứng yên và di chuyển.
- Phát triển phương pháp IB kết hợp với phương pháp tách biến PGD mô phỏng bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật thể biên đàn hồi.

1.9. Bố cục luận án

Cấu trúc của luận án được trình bày như sau :

Chương 2 : Phương pháp PGD cho bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng. Trong chương này, luận án sẽ giới thiệu khái quát về cơ sở lý thuyết của phương pháp PGD. Sau đó, phương pháp được áp dụng để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng trong không gian hai chiều và ba chiều. Các kết quả tính toán các phương trình Poisson và phương trình Biharmonic trong không gian hai chiều và ba chiều cũng được trình bày ở chương này.

Chương 3: Phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén. Trong chương này, phương pháp PGD được đề xuất để giải các bài toán về dòng chảy nhớt không nén. Các bước giải hệ phương trình Navier-Stokes được bằng phương pháp chiếu được trình bày, sau đó phương pháp PGD được áp dụng để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng để tìm áp suất của lưu chất. Các kết quả mô

phòng dòng chảy nhớt không nén với các điều kiện biên và miền tính toán khác nhau cũng được trình bày ở chương này.

Chương 4 : Phương pháp biên nhúng kết hợp với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng. Trong chương này, luận án trình bày giải thuật cho bài toán dòng chảy nhớt không nén được qua vật thể biên cứng. Các bước giải hệ phương trình Navier – Stokes bằng phương pháp chiếu sẽ được mô tả, bên cạnh đó việc xác định lực cưỡng bức, rời rạc không gian trên lưới so le và xấp xỉ các toán tử vi phân bằng phương pháp sai phân hữu hạn cũng được trình bày. Cuối cùng là kết quả mô phỏng số của các bài toán cụ thể.

Chương 5 : Phương pháp biên nhúng kết hợp với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật thể biên đàn hồi. Trong chương này, luận án trình bày giải thuật cho bài toán dòng chảy nhớt không nén được qua vật thể biên đàn hồi. Cuối cùng là kết quả mô phỏng số của các bài toán cụ thể.

Chương 6: Kết luận và kiến nghị.

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠO HÀM RIÊNG

2.1. Giới thiệu

Nhiều mô hình bài toán thường gặp trong khoa học và kỹ thuật thường được định nghĩa trong không gian đa chiều, điều đó làm cho vấn đề chiều thứ nguyên trở nên cực kỳ phức tạp khi áp dụng kỹ thuật chia lưới rời rạc thông thường. Hơn nữa các mô hình theo tiêu chuẩn có thể trở thành đa chiều khi các thông số thay đổi.

Khi giải các bài toán trên không gian đa chiều bằng các phương pháp số truyền thống (phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp thể tích hữu hạn hoặc phương pháp sai phân hữu hạn ...) thì số bậc tự do sẽ tỉ lệ theo hàm mũ với số chiều của bài toán. Giả sử chúng ta tìm kiếm lời giải $u(x, y, z)$ của bài toán bất kỳ được định nghĩa trên không gian ba chiều $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z$, nếu trên mỗi chiều không gian chúng ta chia 100 nút lưới thì tổng số bậc tự do của bài toán sẽ là 10^6 và đây là một con số không nhỏ. Vấn đề sẽ càng trở nên nghiêm trọng khi số nút lưới trên mỗi chiều không gian tăng lên.

Để khắc phục khó khăn của các phương pháp số truyền thống khi giải các bài toán đa chiều, đã có nhiều phương pháp ra đời. Trong đó, phải kể đến một lớp các phương pháp rất hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán trên không gian đa chiều đó là các phương pháp giảm bậc mô hình. Các phương pháp này thường giả sử một cách tổng quát rằng lời giải u của một bài toán vật lý có thể được xấp xỉ ở dạng sau

$$u(\mathbf{x}, t) \approx u^n(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n a^k(t) \Phi^k(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

ở đây \mathbf{x} là một vector tọa độ hai chiều hoặc ba chiều và $\Phi^k(\mathbf{x})$ là một cơ sở giảm lược chiều thấp. n là kích thước cơ sở giảm lược mà thường nhỏ hơn nhiều so với kích thước toàn lưới của lời giải rời rạc truyền thống. Các hệ số thời gian $a^k(t)$ là lời giải của hệ bậc thấp đạt được bằng phép chiếu phương trình ban đầu của bài toán trên cơ sở này.

Có nhiều cơ sở giảm lược khác nhau đã được sử dụng để giảm bậc mô hình như cơ sở Lagrange, Hermit, Taylor hoặc Proper orthogonal decomposition (POD). Trong những năm gần đây, một phương pháp giảm bậc mô hình khá phổ biến và hiệu quả đã được phát triển và áp dụng trong nhiều lĩnh vực, đó là phương pháp PGD. Phương pháp PGD là phương pháp giảm bậc mô hình dựa trên cơ sở tách biến, lời giải $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ của bài toán được tìm ở dạng sau

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) \approx \sum_{i=1}^Q \prod_{k=1}^N F_{ki}(x_k) = \sum_{i=1}^Q F_{1i}(x_1) F_{2i}(x_2) \cdots F_{Ni}(x_N) \quad (2.2)$$

với x_i có thể là biến vô hướng hoặc vector liên quan đến không gian, thời gian hoặc thông số bất kỳ khác của bài toán. Vì vậy, nếu M bậc tự do được sử dụng để rời rạc mỗi biến thì tổng số ẩn liên quan đến lời giải là $Q \times N \times M$ thay vì M^N bậc tự do như trong các kỹ thuật rời rạc truyền thống.

2.2. Phương pháp PGD cho phương trình vi phân đạo hàm riêng

2.2.1. Cơ sở lý thuyết của phương pháp PGD

Trong phần này sẽ trình bày về cơ sở lý thuyết của phương pháp PGD [120], để mô tả một cách rõ ràng mà không làm mất tính tổng quát, phương pháp PGD sẽ được minh họa trong không gian 2D. Xét bài toán như sau

$$L(U) = g \text{ trong miền } \Omega = \Omega_x \times \Omega_y, \quad (2.3)$$

với điều kiện biên được cho trước.

Mục tiêu của chúng ta là tìm lời giải xấp xỉ của bài toán $U(x, y) \in \Omega = X \times Y \subset R^2$ với $x \in X \subset R$ và $y \in Y \subset R$ như sau

$$U(x, y) \approx \sum_{i=1}^n F^i(x) \cdot G^i(y) \quad (2.4)$$

Giả sử $n-1$ hàm $F_i(x)$ và $G_i(y)$ đầu tiên đã biết và hàm F^n và G^n cần được tìm, khi đó

$$U(x, y) \approx \sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y) \quad (2.5)$$

Thay phương trình (2.5) vào phương trình (2.3) ta được:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y)\right) = g + re^n \quad (2.6)$$

ở đây re^n là sai số thặng dư của lời giải xấp xỉ. Để xác định F^n và G^n , phương trình (2.6) lần lượt được chiếu lên chiều của F^n và G^n như sau

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y)\right), F^n \right\rangle_{L^2(x)} = \langle g, F^n \rangle_{L^2(x)} + \langle re^n, F^n \rangle_{L^2(x)} \quad (2.7)$$

và

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y)\right), G^n \right\rangle_{L^2(y)} = \langle g, G^n \rangle_{L^2(y)} + \langle re^n, G^n \rangle_{L^2(y)} \quad (2.8)$$

ở đây $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(x)}$ và $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(y)}$ là tích vô hướng trên L^2 trong chiều trục x và trục y tương ứng. Với phương pháp này, sai số thặng dư phải trực giao với các hàm F^n và G^n , vì vậy

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y)\right), F^n \right\rangle_{L^2(x)} = \langle g, F^n \rangle_{L^2(x)} \quad (2.9)$$

và

$$\left\langle L\left(\sum_{i=1}^{n-1} F^i(x) \cdot G^i(y) + F^n(x) \cdot G^n(y)\right), G^n \right\rangle_{L^2(y)} = \langle g, G^n \rangle_{L^2(y)} \quad (2.10)$$

Để đạt được các hàm F^n và G^n , các phương trình (2.9) và (2.10) phải được giải đồng thời bằng cách áp dụng giải thuật lặp luân phiên cho đến khi kết quả của bài toán hội tụ.

2.2.2. Phương pháp PGD cho phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao

Trong phần này, chúng ta sẽ minh họa rõ nét hơn cơ sở lý thuyết ở phần trên bằng cách áp dụng phương pháp PGD cho các phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao.

2.2.2.1. Phương trình Poisson

Xét phương trình Poisson trong không gian 3D như sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \quad (2.11)$$

trong miền $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z$.

Giả sử lời giải của bài toán được trình bày ở dạng tách biến như sau

$$u(x, y, z) \approx \sum_i^N X_i(x) \cdot Y_i(y) \cdot Z_i(z) \quad (2.12)$$

Quá trình giải phương trình (2.11) là một quá trình lặp. Lời giải ở bước lặp $(n+1)$ là tổng của các tích của các hàm một biến

$$u^{n+1}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot Y_i(y) \cdot Z_i(z) + R(x) \cdot S(y) \cdot T(z), \quad (2.13)$$

ở đây $R(x) = X_{n+1}(x)$, $S(y) = Y_{n+1}(y)$ and $T(z) = Z_{n+1}(z)$

Đưa phương trình (2.11) về dạng yếu, ta được

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} u^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - f(x, y, z) \right) = 0 \quad (2.14)$$

ở đây u^* là hàm trọng số được định nghĩa như sau

$$u^* = R^*(x) \cdot S(y) \cdot T(z) + R(x) \cdot S^*(y) \cdot T(z) + R(x) \cdot S(y) \cdot T^*(z). \quad (2.15)$$

Thay phương trình (2.13) và (2.15) vào phương trình (2.14), ta được

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} \left(R^* \cdot S \cdot T + R \cdot S^* \cdot T + R \cdot S \cdot T^* \right) \left(\frac{d^2 R}{dx^2} \cdot S \cdot T \right. \\ & \left. + R \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} \cdot T + R \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} \right) dx dy dz \\ & = \int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} \left(R^* \cdot S \cdot T + R \cdot S^* \cdot T + R \cdot S \cdot T^* \right) \left(f - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i}{dx^2} \cdot Y_i \cdot Z_i \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} \cdot Z_i - \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (2.16)$$

Bước 1: Tìm hàm $R(x)$

Giả sử $S(y)$ và $T(z)$ đã biết, khi đó $S^*(y) = 0$ và $T^*(z) = 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} R^* \cdot S \cdot T \left(\frac{d^2 R}{dx^2} \cdot S \cdot T + R \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} \cdot T + R \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} \right) dx dy dz \\ & = \int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} R^* \cdot S \cdot T \left(f - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i}{dx^2} \cdot Y_i \cdot Z_i - \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} \cdot Z_i \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nhóm các thành phần trong dấu tích phân ở phương trình (2.17) theo từng biến, ta được

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_x} R^* \left(\frac{d^2 R}{dx^2} \int_{\Omega_y} S^2 dy \int_{\Omega_z} T^2 dz + R \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} dy \int_{\Omega_z} T^2 dz + R \int_{\Omega_y} S^2 dy \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} dz \right) dx \\
&= \int_{\Omega_x} R^* \left(fx(x) \int_{\Omega_y} S \cdot fy(y) dy \int_{\Omega_z} T \cdot fz(z) dz - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i}{dx^2} \int_{\Omega_y} S \cdot Y_i dy \int_{\Omega_z} T \cdot Z_i dz \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n X_i \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy \int_{\Omega_z} T \cdot Z_i dz - \sum_{i=1}^n X_i \int_{\Omega_y} S \cdot Y_i dy \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} dz \right) dx
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Thu gọn phương trình (2.18), ta được

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_x} R^* \left((a_y a_z) \frac{d^2 R}{dx^2} + (b_y a_z + a_y b_z) R \right) dx \\
&= \int_{\Omega_x} R^* \left(a_{fx} - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i}{dx^2} (a_{y_i} a_{z_i}) - \sum_{i=1}^n X_i (b_{y_i} a_{z_i}) - \sum_{i=1}^n X_i (a_{y_i} b_{z_i}) \right) dx
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ở đây

$$\begin{aligned}
a_y &= \int_{\Omega_y} S^2 dy, \quad b_y = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} dy, \\
a_z &= \int_{\Omega_z} T^2 dz, \quad b_z = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} dz, \\
a_{fx} &= fx(x) \int_{\Omega_y} S \cdot fy(y) dy \int_{\Omega_z} T \cdot fz(z) dz, \\
a_{y_i} &= \int_{\Omega_y} S \cdot Y_i dy, \quad b_{y_i} = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy, \\
a_{z_i} &= \int_{\Omega_z} T \cdot Z_i dz, \quad b_{z_i} = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} dz
\end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số ở hai vế phương trình của phương trình (2.19), ta được dạng mạnh của phương trình như sau

$$\begin{aligned}
(a_y a_z) \frac{d^2 R}{dx^2} + (b_y a_z + a_y b_z) R &= a f_x - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i}{dx^2} (a_{y_i} a_{z_i}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n X_i (b_{y_i} a_{z_i}) - \sum_{i=1}^n X_i (a_{y_i} b_{z_i})
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Bước 2: Tìm hàm $S(y)$

Từ hàm $R(x)$ vừa tìm được ở bước 1 và giả sử hàm $T(z)$ đã biết, khi đó $R^*(x) = 0$ và $T^*(z) = 0$, phương trình (2.16) trở thành

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} R \cdot S^* \cdot T \left(\frac{d^2 R}{dx^2} \cdot S \cdot T + R \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} \cdot T + R \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} \right) dx dy dz \\
&= \int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} R \cdot S^* \cdot T \left(f - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i}{dx^2} \cdot Y_i \cdot Z_i - \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} \cdot Z_i \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} \right) dx dy dz
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Vì các hàm theo biến x và z đã biết, vì vậy phương trình (2.21) có thể rút gọn như sau

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_y} S^* \left((a_x a_z) \frac{d^2 S}{dy^2} + (b_x a_z + a_x b_z) S \right) dy \\
&= \int_{\Omega_y} S^* \left(a_{f_y} - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 Y_i}{dy^2} (a_{x_i} a_{z_i}) - \sum_{i=1}^n Y_i (b_{x_i} a_{z_i}) - \sum_{i=1}^n Y_i (a_{x_i} b_{z_i}) \right) dy
\end{aligned} \tag{2.22}$$

ở đây

$$\begin{aligned}
a_x &= \int_{\Omega_x} R^2 dx, \quad b_x = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 R}{dx^2} dx, \\
a_z &= \int_{\Omega_z} T^2 dz, \quad b_z = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} dz, \\
a_{fy} &= f_y(y) \int_{\Omega_x} R \cdot f_x(x) dx \int_{\Omega_z} T \cdot f_z(z) dz, \\
a_{x_i} &= \int_{\Omega_x} R \cdot X_i dx, \quad b_{x_i} = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx, \\
a_{z_i} &= \int_{\Omega_z} T \cdot Z_i dz, \quad b_{z_i} = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} dz
\end{aligned}$$

Phương trình (2.22) có thể đưa về dạng mạnh như sau

$$\begin{aligned}
(a_x a_z) \frac{d^2 S}{dy^2} + (b_x a_z + a_x b_z) S &= a_{fy} - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 Y_i}{dy^2} (a_{x_i} a_{z_i}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n Y_i (b_{x_i} a_{z_i}) - \sum_{i=1}^n Y_i (a_{x_i} b_{z_i})
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Bước 3: tìm hàm $T(z)$

Từ hàm $R(x)$ và $S(y)$ đã tính ở bước 1 và bước 2, khi đó $R^* = 0$ và $S^* = 0$, phương trình (2.16) trở thành

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} R \cdot S \cdot T^* \left(\frac{d^2 R}{dx^2} \cdot S \cdot T + R \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} \cdot T + R \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} \right) dx dy dz \\
&= \int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} R \cdot S \cdot T^* \left(f - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i}{dx^2} \cdot Y_i \cdot Z_i \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} \cdot Z_i - \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} \right) dx dy dz
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Vì các hàm theo biến x và y đã biết, vì vậy phương trình (2.24) có thể rút gọn như sau

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_z} T^* \left((a_x a_y) \frac{d^2 T}{dz^2} + (b_x a_y + a_x b_y) T \right) dz \\
&= \int_{\Omega_z} T^* \left(a_{fz} - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 T_i}{dz^2} (a_{x_i} a_{y_i}) - \sum_{i=1}^n T_i (b_{x_i} a_{z_i}) - \sum_{i=1}^n T_i (a_{x_i} b_{y_i}) \right) dz
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ở đây

$$\begin{aligned}
a_x &= \int_{\Omega_x} R^2 dx, \quad b_x = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 R}{dx^2} dx, \\
a_y &= \int_{\Omega_y} S^2 dy, \quad b_y = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} dy, \\
a_{fz} &= fz(z) \int_{\Omega_x} R \cdot fx(x) dx \int_{\Omega_y} S \cdot fy(y) dy, \\
a_{x_i} &= \int_{\Omega_x} R \cdot X_i dx, \quad b_{x_i} = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx, \\
a_{y_i} &= \int_{\Omega_y} S \cdot Y_i dy, \quad b_{y_i} = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy
\end{aligned}$$

Phương trình (2.25) được đưa về dạng mạnh như sau

$$\begin{aligned}
(a_x a_y) \frac{d^2 T}{dz^2} + (b_x a_y + a_x b_y) T &= a_{fz} - \sum_{i=1}^n \frac{d^2 T_i}{dz^2} (a_{x_i} a_{y_i}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n T_i (b_{x_i} a_{y_i}) - \sum_{i=1}^n T_i (a_{x_i} b_{y_i})
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Các bước giải để tìm $R(x)$, $S(y)$ và $T(z)$ được lặp cho đến khi kết quả hội tụ. Nếu kí hiệu $R^{(q)}(x)$ và $R^{(q-1)}(x)$ là hàm $R(x)$ đã được tính ở bước lặp hiện tại và bước lặp trước, tương tự với $S^{(q)}(y)$ và $S^{(q-1)}(y)$ và $T^{(q)}(z)$ và $T^{(q-1)}(z)$, tiêu chuẩn dừng được chọn như sau

$$e = \left\| R^{(q)}(x) \cdot S^{(q)}(y) \cdot T^{(q)}(z) - R^{(q-1)}(x) \cdot S^{(q-1)}(y) \cdot T^{(q-1)}(z) \right\| < \varepsilon_{RST}, \tag{2.27}$$

ở đây ε_{RST} là hằng số được chọn đủ bé để đảm bảo độ chính xác.

Sau khi các bước lặp tìm $R(x)$, $S(y)$ và $T(z)$ hội tụ, chúng ta xác định được $X_{n+1}(x) = R(x)$, $Y_{n+1}(y) = S(y)$ và $T_{n+1}(z) = T(z)$. Quá trình tìm các hàm $(X_i(x), Y_i(y), Z_i(z))$ phải được tiếp tục cho đến khi đạt được sự hội tụ toàn cục của bài toán ở bước lặp thứ N , khi đó nghiệm xấp xỉ của bài toán được tính như sau

$$u(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y) \cdot Z_i(z). \quad (2.28)$$

Điều kiện dừng toàn cục của bài toán được tính như sau

$$E = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - f(x, y, z) \right\|_2 < \varepsilon_u, \quad (2.29)$$

ở đây ε_u là một hằng số được chọn đủ nhỏ. Chúng ta cũng có thể sử dụng điều kiện dừng toàn cục bằng cách sử dụng công thức sau

$$E = \frac{\|X_n(x) \cdot Y_n(y)\|_2}{\left\| \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot Y_i(y) \right\|_2} < \varepsilon_u. \quad (2.30)$$

2.2.2.2. Phương trình Biharmonic

Xét phương trình Biharmonic trong không gian ba chiều như sau

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} = f(x, y, z) \quad (2.31)$$

trong miền $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z$.

Mục tiêu của chúng ta là áp dụng phương pháp PGD để tìm N các hàm số $(X_i(x), Y_i(y), Z_i(z))$, $i = 1, \dots, N$ để mỗi hàm $X_i(x)$, $Y_i(y)$ và $Z_i(z)$ được định nghĩa trên miền 1D. Khi đó, lời giải của của phương trình trong không gian 3D được trình bày dưới dạng như sau

$$u(x, y, z) \approx \sum_i^N X_i(x) \cdot Y_i(y) \cdot Z_i(z). \quad (2.32)$$

Giả sử lời giải ở bước lặp thứ n đã biết, chúng ta cần tìm lời giải ở bước lặp thứ $n+1$

$$u^{n+1}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot Y_i(y) \cdot Z_i(z) + R(x) \cdot S(y) \cdot T(z), \quad (2.33)$$

ở đây $R(x) = X_{n+1}(x)$, $S(y) = Y_{n+1}(y)$ và $T(z) = Z_{n+1}(z)$

Phương trình (2.31) được đưa về dạng yếu như sau

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z} u^* \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} - f(x, y, z) \right) = 0 \quad (2.34)$$

ở đây u^* là hàm trọng số và được định nghĩa như sau

$$u^* = R^*(x) \cdot S(y) \cdot T(z) + R(x) \cdot S^*(y) \cdot T(z) + R(x) \cdot S(y) \cdot T^*(z). \quad (2.35)$$

Để tìm các hàm $R(x)$, $S(y)$ và $T(z)$, một giải thuật lặp cố định luân phiên được áp dụng, gồm các bước như sau

Bước 1: Tìm $R(x)$

Giả sử $S(y)$ và $T(z)$ đã biết, khi đó $S^*(y) = 0$ và $T^*(z) = 0$. Khi đó, hàm $R(x)$ được tìm bằng cách giải phương trình sau

$$\begin{aligned} & (a_y a_z) \frac{d^4 R}{dx^4} + (2b_y a_z + 2a_y b_z) \frac{d^2 R}{dx^2} + (c_y a_z + a_y c_z + 2b_y b_z) R \\ & = a f_x - \sum_{i=1}^n \frac{d^4 X_i}{dx^4} (a_{y_i} a_{z_i}) - 2 \sum_{i=1}^n \frac{d^2 X_i}{dx^2} (b_{y_i} a_{z_i} + a_{y_i} b_{z_i}) \\ & \quad - \sum_{i=1}^n X_i (c_{y_i} a_{z_i} + a_{y_i} c_{z_i} + 2b_{y_i} b_{z_i}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

ở đây

$$a_y = \int_{\Omega_y} S^2 dy, b_y = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} dy, c_y = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^4 S}{dy^4} dy$$

$$a_z = \int_{\Omega_z} T^2 dz, b_z = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} dz, c_z = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^4 T}{dz^4} dz$$

$$af_x = fx(x) \int_{\Omega_y} S \cdot fy(y) dy \int_{\Omega_z} T \cdot fz(z) dz$$

$$a_{y_i} = \int_{\Omega_y} S \cdot Y_i dy, b_{y_i} = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy, c_{y_i} = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^4 Y_i}{dy^4} dy$$

$$a_{z_i} = \int_{\Omega_z} T \cdot Z_i dz, b_{z_i} = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} dz, c_{z_i} = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^4 Z_i}{dz^4} dz$$

Bước 2: tìm hàm $S(y)$

Từ hàm $R(x)$ vừa tìm được ở bước 1 và giả sử hàm $T(z)$ đã biết, khi đó hàm $S(x)$ sẽ tìm được từ phương trình

$$\begin{aligned} & (a_x a_z) \frac{d^4 S}{dy^4} + (2b_x a_z + 2a_x b_z) \frac{d^2 S}{dy^2} + (c_x a_z + a_x c_z + 2b_x b_z) S \\ & = af_y - \sum_{i=1}^n \frac{d^4 Y_i}{dy^4} (a_{x_i} a_{z_i}) - 2 \sum_{i=1}^n \frac{d^2 Y_i}{dy^2} (b_{x_i} a_{z_i} + a_{x_i} b_{z_i}) \\ & \quad - \sum_{i=1}^n Y_i (c_{x_i} a_{z_i} + a_{x_i} c_{z_i} + 2b_{x_i} b_{z_i}) \end{aligned} \quad , \quad (2.37)$$

ở đây

$$a_x = \int_{\Omega_x} R^2 dx, b_x = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 R}{dx^2} dx, c_x = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^4 R}{dx^4} dx$$

$$a_z = \int_{\Omega_z} T^2 dz, b_z = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} dz, c_z = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^4 T}{dz^4} dz$$

$$af_y = fy(y) \int_{\Omega_x} R \cdot fx(x) dx \int_{\Omega_z} T \cdot fz(z) dz$$

$$a_{x_i} = \int_{\Omega_x} R \cdot X_i dx, b_{x_i} = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx, c_{x_i} = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^4 X_i}{dx^4} dx$$

$$a_{z_i} = \int_{\Omega_z} T \cdot Z_i dz, b_{z_i} = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^2 Z_i}{dz^2} dz, c_{z_i} = \int_{\Omega_z} T \cdot \frac{d^4 Z_i}{dz^4} dz$$

Bước 3: tìm hàm $T(z)$

Với $R(x)$ và $S(y)$ vừa tìm được ở hai bước trên, khi đó hàm $T(z)$ sẽ được tìm bằng cách giải phương trình sau

$$\begin{aligned} & (a_x a_y) \frac{d^4 T}{dz^4} + (2b_x a_y + 2a_x b_y) \frac{d^2 T}{dz^2} + (c_x a_y + a_x c_y + 2b_x b_y) T \\ & = af_z - \sum_{i=1}^n \frac{d^4 Z_i}{dz^4} (a_{x_i} a_{y_i}) - 2 \sum_{i=1}^n \frac{d^2 T_i}{dz^2} (b_{x_i} a_{y_i} + a_{x_i} b_{y_i}) \\ & \quad - \sum_{i=1}^n T_i (c_{x_i} a_{y_i} + a_{x_i} c_{y_i} + 2b_{x_i} b_{y_i}) \end{aligned} \quad , \quad (2.38)$$

ở đây

$$a_x = \int_{\Omega_x} R^2 dx, b_x = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 R}{dx^2} dx, c_x = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^4 R}{dx^4} dx$$

$$a_y = \int_{\Omega_y} S^2 dy, b_y = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} dy, c_y = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^4 S}{dy^4} dy$$

$$af_z = f_z(z) \int_{\Omega_x} R \cdot fx(x) dx \int_{\Omega_y} S \cdot fy(y) dy$$

$$a_{x_i} = \int_{\Omega_x} R \cdot X_i dx, b_{x_i} = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx, c_{x_i} = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^4 X_i}{dx^4} dx$$

$$a_{y_i} = \int_{\Omega_y} S \cdot Y_i dy, b_{y_i} = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy, c_{y_i} = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^4 Y_i}{dy^4} dy$$

Các bước giải để tìm $R(x)$, $S(y)$ và $T(z)$ được lặp cho đến khi kết quả hội tụ. Nếu kí hiệu $R^{(q)}(x)$ và $R^{(q-1)}(x)$ là hàm $R(x)$ đã được tính ở bước lặp hiện tại và bước lặp trước, tương tự với $S^{(q)}(y)$ và $S^{(q-1)}(y)$ và $T^{(q)}(z)$ và $T^{(q-1)}(z)$, tiêu chuẩn dừng được chọn như sau

$$e = \left\| R^{(q)}(x) \cdot S^{(q)}(y) \cdot T^{(q)}(z) - R^{(q-1)}(x) \cdot S^{(q-1)}(y) \cdot T^{(q-1)}(z) \right\| < \varepsilon_{RST}, \quad (2.39)$$

ở đây ε_{RST} là hằng số được chọn đủ bé để đảm bảo độ chính xác.

Sau khi các bước lặp tìm $R(x)$, $S(y)$ và $T(z)$ hội tụ, chúng ta xác định được $X_{n+1}(x) = R(x)$, $Y_{n+1}(y) = S(y)$ và $Z_{n+1}(z) = T(z)$. Quá trình tìm các hàm $(X_i(x), Y_i(y), Z_i(z))$ phải được tiếp tục cho đến khi đạt được sự hội tụ toàn cục của bài toán ở bước lặp thứ N , khi đó nghiệm xấp xỉ của bài toán được tính như sau

$$u(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y) \cdot Z_i(z). \quad (2.40)$$

Điều kiện dừng toàn cục của bài toán được tính như sau

$$E = \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} - f(x, y, z) \right\|_2 < \varepsilon_u \quad (2.41)$$

ở đây ε_u là một hằng số được chọn đủ nhỏ. Chúng ta cũng có thể sử dụng điều kiện dừng toàn cục bằng cách sử dụng công thức sau

$$E = \frac{\|X_n(x) \cdot Y_n(y)\|_2}{\left\| \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot Y_i(y) \right\|_2} < \varepsilon_u. \quad (2.42)$$

2.2.3. Sơ đồ sai phân hữu hạn cho phương trình vi phân một chiều

Như đã trình bày ở các mục trên, sau khi áp dụng phương pháp PGD, việc giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng trong không gian hai chiều hoặc ba chiều sẽ được đưa về việc giải chuỗi các phương trình vi phân một chiều. Việc giải các phương trình vi phân một chiều sẽ được thực hiện dễ dàng bằng các phương pháp rời rạc thông thường như phân tử hữu hạn, thể tích hữu hạn, phương pháp meshfree, ... Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày phương pháp sai phân hữu hạn trong việc rời rạc và giải các phương trình vi phân một chiều.

Xét lưới một chiều gồm N điểm lưới với bước lưới đều $h = x_{i+1} - x_i$ như sau $x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N-1} < x_N$.

Giả sử $f(x)$ là một hàm bất kỳ, khi đó đạo hàm bậc nhất của hàm f với độ chính xác bậc bốn tại điểm x_i được cho như sau

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_i = \frac{\frac{1}{12}f_{i-2} - \frac{2}{3}f_{i-1} + \frac{2}{3}f_{i+1} - \frac{1}{12}f_{i+2}}{h} + O(h^4), \quad i = 3, 4, \dots, N-2 \\ f'_i = \frac{-\frac{25}{12}f_i + 4f_{i+1} - 3f_{i+2} + \frac{4}{3}f_{i+3} - \frac{1}{4}f_{i+4}}{h} + O(h^4), \quad i = 1, 2 \\ f'_i = \frac{\frac{25}{12}f_i - 4f_{i-1} + 3f_{i-2} - \frac{4}{3}f_{i-3} + \frac{1}{4}f_{i-4}}{h} + O(h^4), \quad i = N-1, N \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Đạo hàm bậc hai của hàm f với độ chính xác bậc bốn tại điểm x_i được tính bằng công thức sau

$$\left\{ \begin{array}{l} f''_i = \frac{-\frac{1}{12}f_{i-2} + \frac{4}{3}f_{i-1} - \frac{5}{2}f_i + \frac{4}{3}f_{i+1} - \frac{1}{12}f_{i+2}}{h^2} \\ \quad + O(h^4), \quad i = 3, 4, \dots, N-2 \\ f''_i = \frac{\frac{15}{4}f_i - \frac{77}{6}f_{i+1} + \frac{107}{6}f_{i+2} - 13f_{i+3} + \frac{61}{12}f_{i+4} - \frac{5}{6}f_{i+5}}{h} \\ \quad + O(h^4), \quad i = 1, 2, N-1, N \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Tương tự, đạo hàm bậc bốn của hàm f với độ chính xác bậc bốn tại các điểm biên và các điểm bên trong được tính bởi công thức sau

$$\left\{ \begin{array}{l} f'''_i = \frac{-\frac{1}{6}f_{i-3} + 2f_{i-2} - \frac{13}{2}f_{i-1} + \frac{28}{3}f_i - \frac{13}{2}f_{i+1} + 2f_{i+2} - \frac{1}{6}f_{i+3}}{h^4} \\ \quad + O(h^4), \quad i = 4, 5, \dots, N-3 \\ f'''_i = \frac{\frac{28}{3}f_i - \frac{111}{2}f_{i+1} + 142f_{i+2} - \frac{1219}{6}f_{i+3} + 176f_{i+4} - \frac{185}{2}f_{i+5} + \frac{82}{3}f_{i+6} - \frac{7}{2}f_{i+7}}{h^4} \\ \quad + O(h^4), \quad i = 1, 2, 3, N-2, N-1, N \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Sau khi các đạo hàm được rời rạc trên lưới sai phân sẽ được thay vào các phương trình vi phân một chiều để giải.

2.3.4. Ví dụ minh họa

Để kiểm chứng khả năng của phương pháp đã đề xuất, một số bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng trong không gian hai chiều và ba chiều sẽ được giải với phương pháp PGD. Để đánh giá hiệu quả của phương pháp đề xuất, các sai số của biến bất kỳ u theo chuẩn L_2 và L_∞ được định nghĩa như sau

$$\|e_u\|_2 = \sqrt{\frac{1}{n_x \times n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (u_{i,j} - u_{i,j}^{ref})^2} \quad (2.46)$$

$$\|e_u\|_\infty = \max |u_{i,j} - u_{i,j}^{ref}| \quad (2.47)$$

ở đây $u_{i,j}^{ref}$ có thể là lời giải chính xác của bài toán hoặc lời giải ở bước lưới đủ mịn đối với các bài toán không có lời giải chính xác tại điểm (x_i, y_j) .

Nếu ký hiệu e_{u1} và e_{u2} lần lượt là sai số của bài toán tương ứng với số điểm lưới N_1 và N_2 thì bậc hội tụ sẽ được đánh giá bởi công thức sau

$$\text{Order}_{(L_\infty/L_2)} = \frac{\log(e_{u1}/e_{u2})}{\log(N_2/N_1)} \quad (2.48)$$

hoặc

$$\text{Order}_{(L_\infty/L_2)} = \frac{\log(e_{u1}/e_{u2})}{\log(h_1/h_2)} \quad (2.49)$$

ở đây h_1 và h_2 lần lượt là bước lưới tương ứng với số điểm lưới N_1 và N_2 .

Các chương trình tính toán trong luận án được thực hiện với phần mềm Matlab phiên bản 2016a trên máy tính với cấu hình Corei7-3632QM CPU 2.20 GHz.

Bài toán 1: Xét phương trình Poisson trong miền chữ nhật hai chiều như sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8\pi^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \quad (2.50)$$

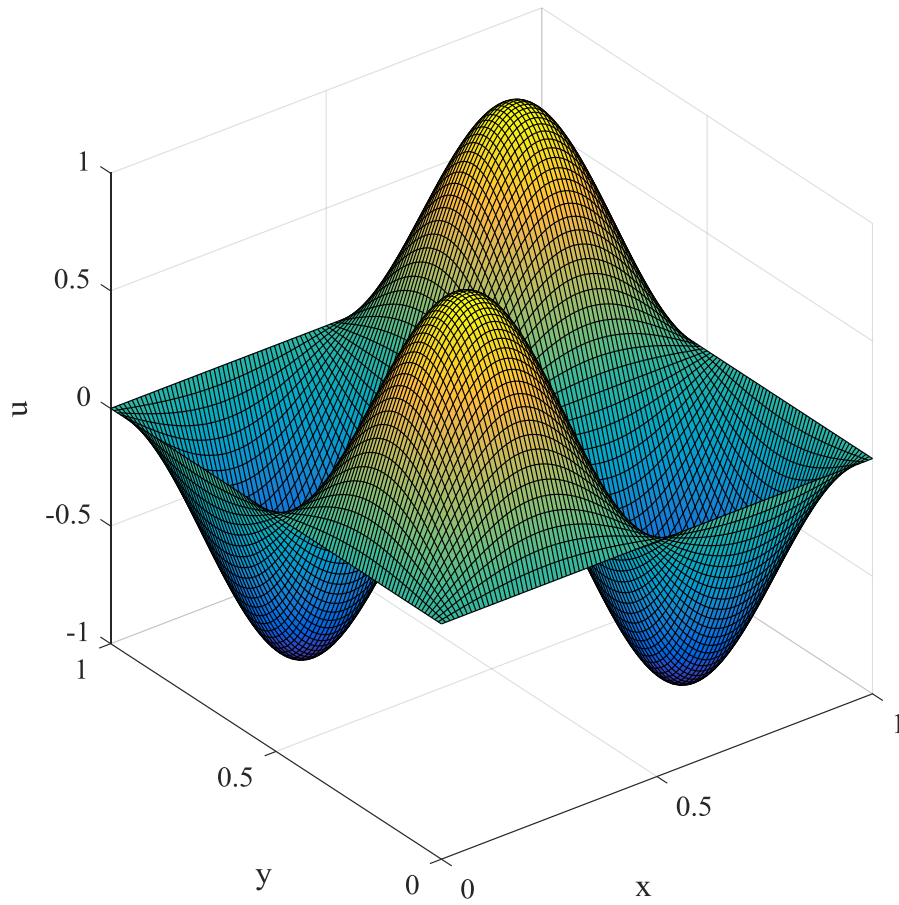
trong miền $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (0,1) \times (0,1)$

Lời giải chính xác của bài toán được cho như sau

$$u_{\text{ex}} = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \quad (2.51)$$

Ở đây chúng ta sẽ áp dụng phương pháp PGD để tìm lời giải của bài toán. Các hàm chưa biết $X_i(x)$ và $Y_i(y)$ được tìm thông qua việc giải các phương trình vi phân một chiều bằng phương pháp sai phân hữu hạn.

Hình 2.1 trình bày lời giải của bài toán bằng phương pháp PGD. Thời gian tính toán và sai số của bài toán cũng được trình bày trong bảng 2.1. Chúng ta thấy rằng phương pháp PGD có tốc độ tính toán vượt trội, cũng như sai số của bài toán tương đối bé so với lời giải chính xác.



Hình 2.1: Lờn giải PGD của phương trình (2.50) với 100 điểm lờn trên mỗi chiều.

Bảng 2.1: Sai số và thời gian tính toán của lờn giải PGD cho phương trình (2.50).

Số điểm lờn trên mỗi chiều	Thời gian tính toán (s)	$\ e_u\ _\infty$	$\ e_u\ _2$
$n = 20$	0.0774	0.0011	0.0021
$n = 40$	0.0812	1.33×10^{-5}	2.20×10^{-5}
$n = 60$	0.0847	1.22×10^{-6}	2.01×10^{-6}
$n = 80$	0.0873	2.82×10^{-7}	5.08×10^{-7}
$n = 100$	0.0886	1.01×10^{-7}	1.91×10^{-7}

Bài toán 2: Xét phương trình Poisson trong không gian ba chiều như sau:

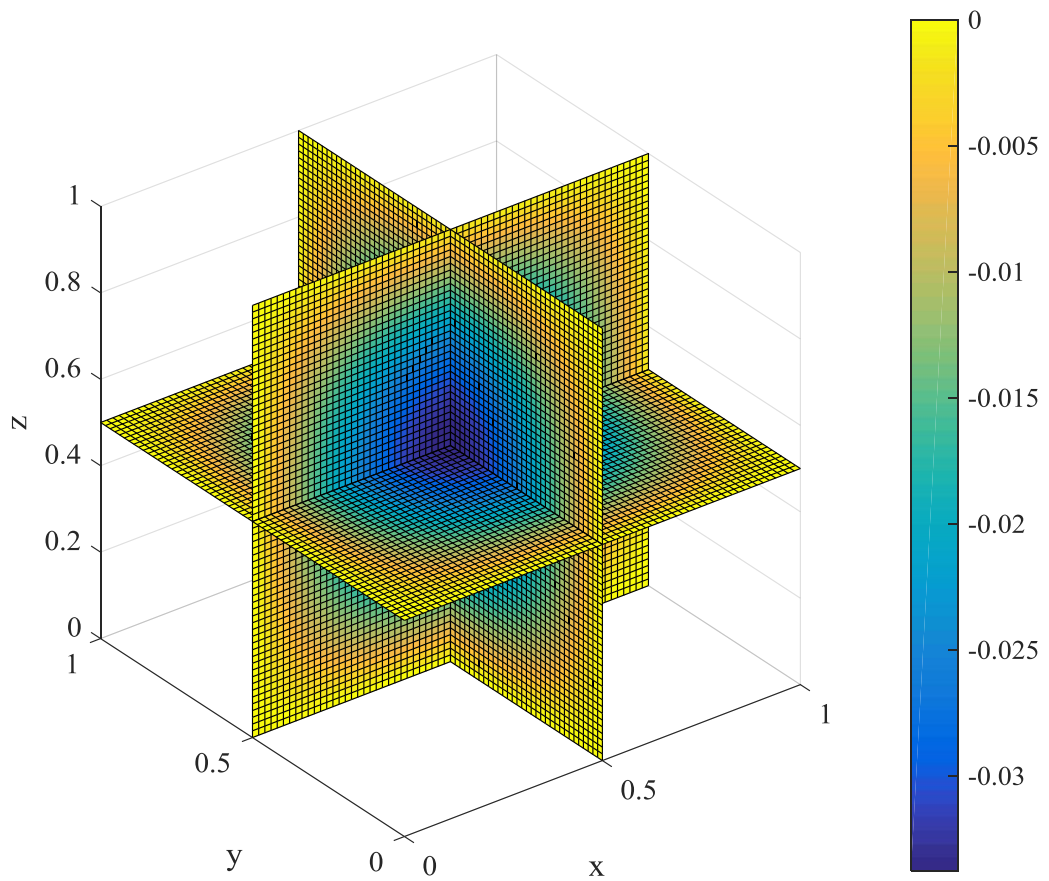
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \quad (2.52)$$

trong miền $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$

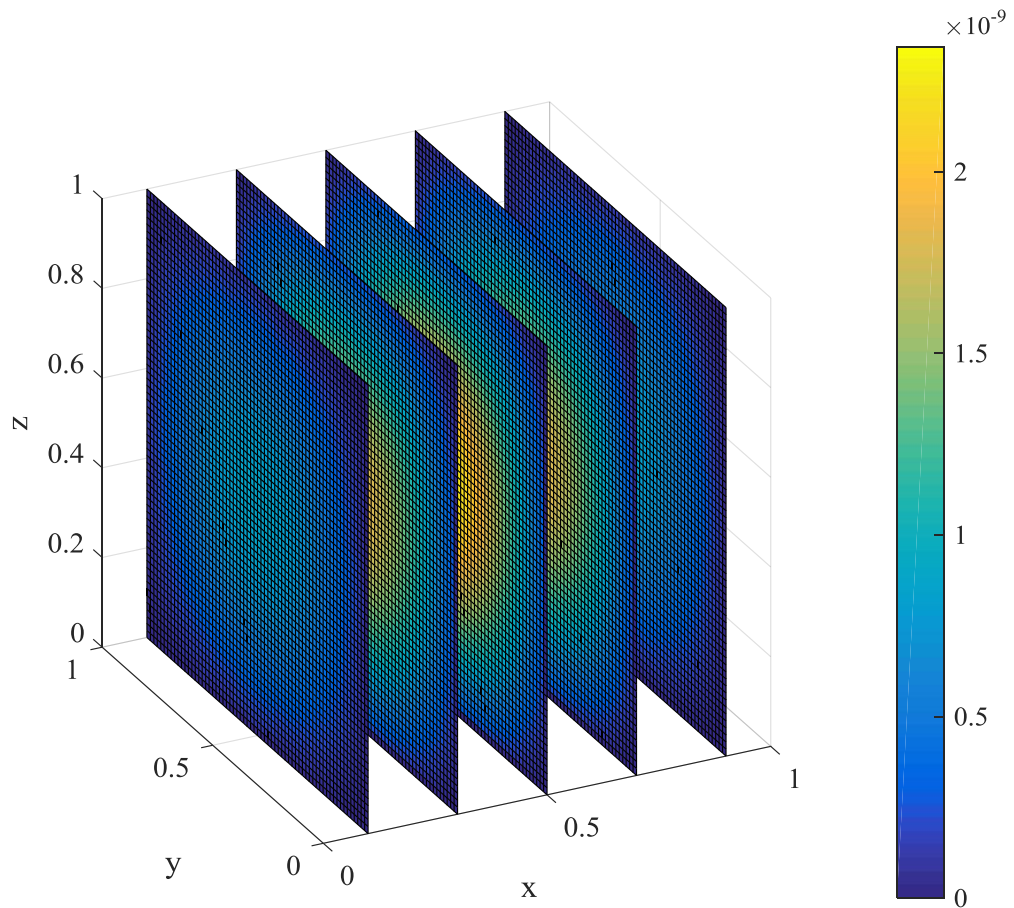
Lời giải chính xác của bài toán được cho như sau

$$u_{\text{ex}} = \frac{-1}{3\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \quad (2.53)$$

Hình 2.2 trình bày lời giải của bài toán được cho ở phương trình (2.52) bằng phương pháp PGD. Giá trị tuyệt đối sai số của lời giải bằng phương pháp PGD với lời giải chính xác được trình bày ở hình 2.3. Thời gian tính toán và sai số của bài toán cũng được trình bày trong bảng 2.2. Từ kết quả ở bảng 2.2 cho thấy sai số ở bước lưới $n=16$ của phương pháp PGD có sự tương đồng rất tốt với các kết quả của Ghasemi [122] và Shi cùng cộng sự [123]. Tuy nhiên, khi tăng số điểm lên $n=32$ thì phương pháp PGD có sai số nhỏ hơn và có tốc độ tính toán vượt trội so với các phương pháp đề xuất ở [122, 123].



Hình 2.2: Lời giải PGD của phương trình (2.52) với 64 điểm lưới trên mỗi chiều.



Hình 2.3: Sai số $|u_{PGD} - u_{ex}|$ của lời giải PGD cho phương trình (2.52) với 64 điểm lưới trên mỗi chiều.

Bảng 2.2: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho phương trình (2.52).

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Tác giả	Thời gian tính toán (s)	$\ e_u\ _\infty$
$n = 16$	Ghasemi [122]	8.47	2.69×10^{-6}
	Shi và cộng sự [123]	0.36	1.34×10^{-4}
	Luận án	0.090	3.23×10^{-6}
$n = 32$	Ghasemi [122]	127	6.73×10^{-7}
	Shi và cộng sự [123]	3.68	3.55×10^{-5}
	Luận án	0.092	5.58×10^{-8}
$n = 64$	Luận án	0.095	2.334×10^{-9}

Bài toán 3:

Xét tấm hình chữ nhật $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ có phương trình vi phân chủ đạo như sau

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y) \quad (2.54)$$

Vế phải của phương trình (2.54) được cho như sau

$$f(x, y) = \frac{q}{D} \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (2.55)$$

Trong trường hợp tấm có điều kiện biên là gối tựa đơn ở cả bốn cạnh như sau

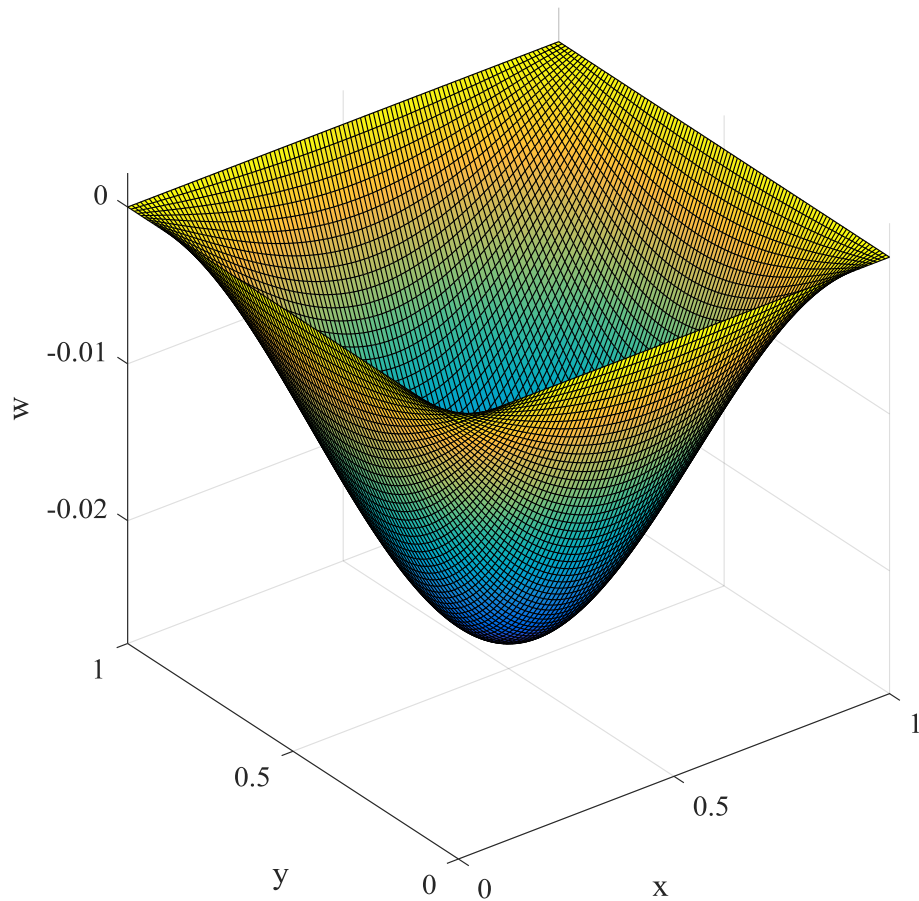
$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{tại } x = 0 \text{ và } x = 1, \quad (2.56)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{tại } y = 0 \text{ và } y = 1, \quad (2.57)$$

khi đó lời giải chính xác của bài toán là

$$w_{\text{ex}} = \frac{q}{4\pi^4 D} \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (2.58)$$

Phương pháp PGD được áp dụng cho bài toán với các thông số mô phỏng như sau: $p = -1$, $E = 1092000$ MPa, $h = 0.01$, $\nu = 0.3$. Miền tính toán được rời rạc với lưới 100 cho mỗi chiều trục x và y . Hình 2.4 trình bày lời giải PGD cho độ võng của tấm mỏng với điều kiện biên gối tựa đơn ở cả bốn cạnh của tấm. Thời gian tính toán và sai số cực đại của bài toán được trình bày ở bảng 2.3.



Hình 2.4: Lời giải PGD cho tấm mỏng với điều kiện biên gối tựa đơn ở bốn cạnh của tấm với 100 điểm lưới trên mỗi chiều.

Bảng 2.3: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho bài toán bài toán tấm mỏng chịu uốn với điều kiện biên gô tựa đơn ở bốn cạnh của tấm.

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Thời gian tính toán (s)	$\ e_w\ _2$	$\ e_w\ _\infty$
$n = 20$	0.379	1.22×10^{-5}	2.18×10^{-5}
$n = 40$	0.412	1.39×10^{-7}	2.51×10^{-7}
$n = 60$	0.416	2.76×10^{-8}	5.31×10^{-8}
$n = 80$	0.483	4.43×10^{-9}	1.02×10^{-8}
$n = 100$	0.545	3.25×10^{-9}	6.47×10^{-9}

Bài toán 4:

Xét tấm hình chữ nhật $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ có phương trình vi phân chủ đạo như sau

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y) \quad (2.59)$$

Trong trường hợp tấm bị ngàm ở cả bốn cạnh, ta có điều kiện biên tương ứng như sau

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = 1, \quad (2.60)$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (2.61)$$

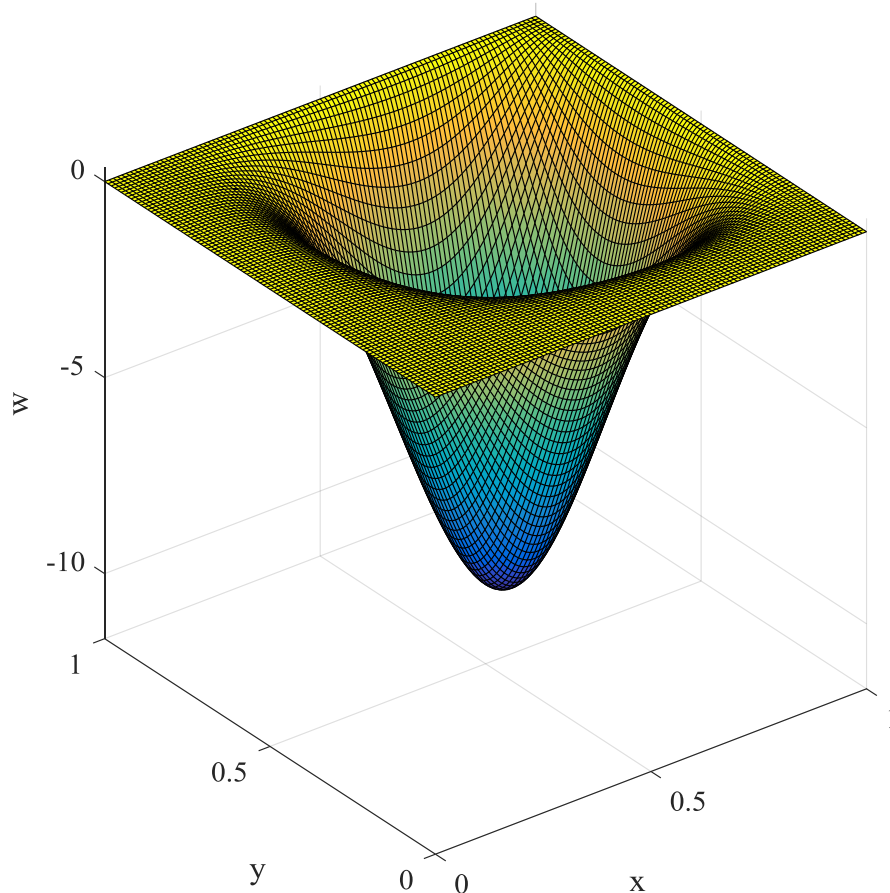
Các thông số mô phỏng được cho tương tự như trường hợp ở bài toán 3, vế phải của phương trình vi phân chủ đạo được cho như sau

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{q}{D} 56400 (a^2 - 10ax + 15x^2) (b - y)^2 y^4 \\
&+ \frac{q}{D} 18800 x^2 (6a^2 - 20ax + 15x^2) y^2 (6b^2 - 20by + 15y^2), \quad (2.62) \\
&+ \frac{q}{D} 56400 (a - x)^2 x^4 (b^2 - 10by + 15y^2)
\end{aligned}$$

với điều kiện biên bị ngàm ở bốn cạnh lời giải chính xác của bài toán là

$$w_{\text{ex}} = \frac{q}{D} 2350 x^4 (x - a)^2 y^4 (y - b)^2. \quad (2.63)$$

Hình 2.5 trình bày lời giải PGD cho độ võng của tấm với điều kiện biên ngàm chặt ở cả bốn cạnh của tấm. Kết quả về thời gian tính toán và sai số của bài toán khi giải bằng phương pháp PGD được trình bày như trong bảng 2.4.



Hình 2.5: Lời giải PGD cho tấm mỏng với điều kiện biên ngàm ở bốn cạnh của tấm với 100 điểm lưới trên mỗi chiều.

Bảng 2.4: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho bài toán tấm mỏng với điều kiện biên ngàm ở bốn cạnh của tấm.

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Thời gian tính toán (s)	$\ e_w\ _2$	$\ e_w\ _\infty$
$n = 20$	0.184	0.01683	0.03434
$n = 40$	0.216	0.00114	0.00232
$n = 60$	0.220	2.32×10^{-4}	4.69×10^{-4}
$n = 80$	0.304	7.48×10^{-5}	1.50×10^{-4}
$n = 100$	0.404	3.15×10^{-5}	6.25×10^{-5}

Bài toán 5:

Xét bài toán 3D Biharmonic như sau

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} \right) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \quad (2.64)$$

trên miền $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x, y, z \leq 1\}$, với điều kiện biên được chọn như sau

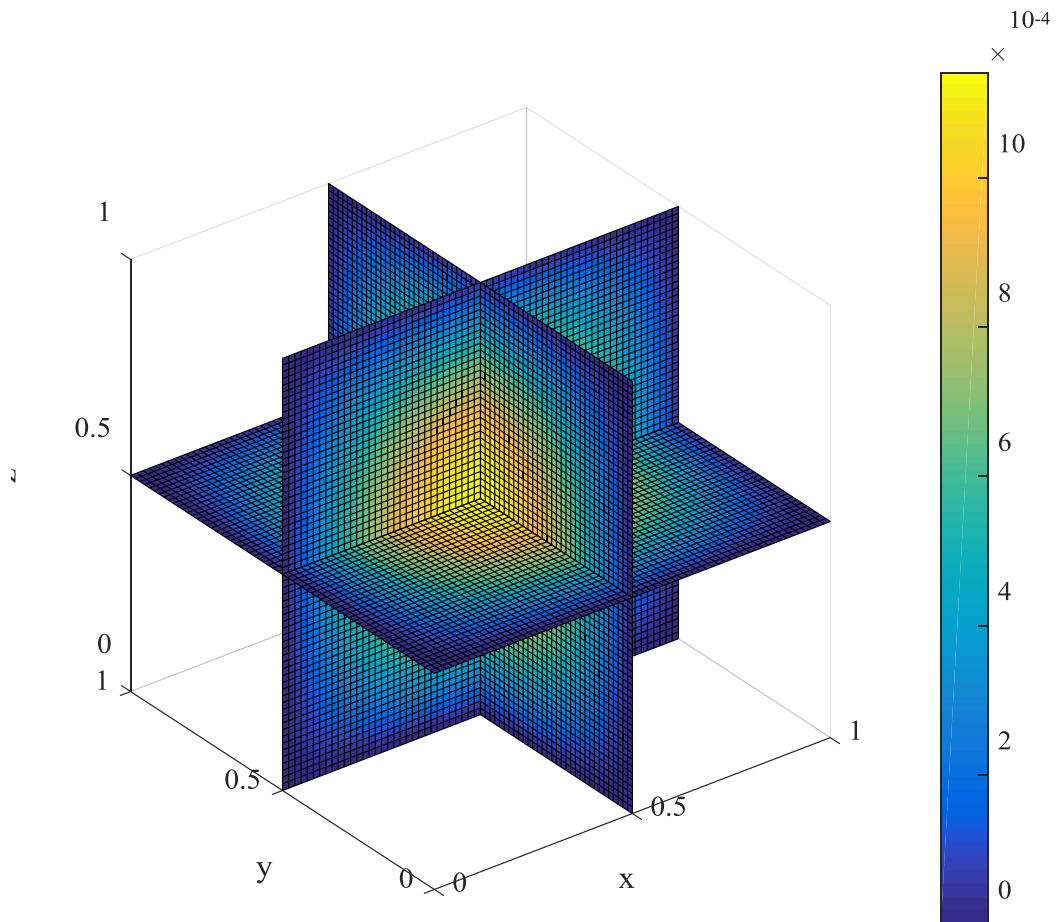
$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (2.65)$$

trong trường hợp này lời giải chính xác của bài toán là

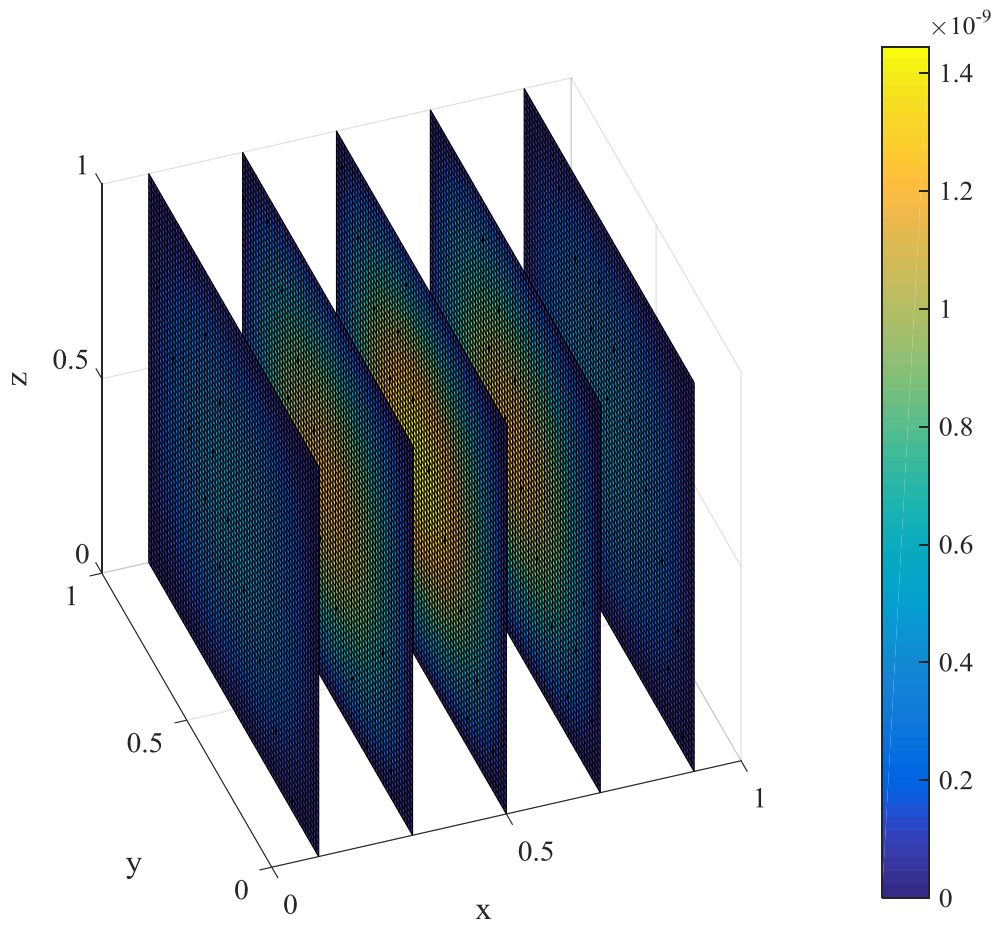
$$u_{\text{ex}} = \frac{1}{9\pi^4} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z). \quad (2.66)$$

Hình 2.6 trình bày lời giải PGD cho phương trình (2.64) ở lưới 64 trên mỗi chiều. Trị tuyệt đối sai số của bài toán được trình bày ở hình 2.7. Giá trị tuyệt đối sai số cực đại và thời gian tính toán của phương pháp đề xuất được so sánh với các kết quả tham khảo [122] được trình bày như trong bảng 2.5. Từ bảng so sánh cho thấy sai số của bài toán với lời giải PGD ở bước lưới $n = 16$ có sự tương đồng rất tốt

với các kết quả tham khảo của Ghasemi [122] và Shi cùng cộng sự [123]. Tuy nhiên khi tăng số điểm lưới $n = 32$ thì phương pháp PGD có sai số bé hơn và có tốc độ tính toán vượt trội so với tốc độ tính toán của của các phương pháp tham khảo.



Hình 2.6: Lời giải PGD cho phương trình (2.64) với 64 điểm lưới trên mỗi chiều.



Hình 2.7: Sai số $|u - u_{\text{ex}}|$ của lời giải PGD cho phương trình (2.64) với 64 điểm lưới trên mỗi chiều.

Bảng 2.5: Thời gian tính toán và sai số của lời giải PGD cho phương trình (2.64).

Số điểm lưới trên mỗi chiều	Tác giả	Thời gian tính toán (s)	$\ e_u\ _\infty$
$n = 16$	Ghasemi [122]	94.1	1.30×10^{-5}
	Shi và cộng sự [123]	2.625	1.62×10^{-6}
	Luận án	0.143	2.38×10^{-6}
$n = 32$	Ghasemi [122]	-	6.37×10^{-6}
	Shi và cộng sự	39.262	4.07×10^{-7}
	Luận án	0.147	2.81×10^{-8}
$n = 64$	Luận án	0.156	1.44×10^{-9}

2.3. Kết luận

Trong chương này, đã áp dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn trong việc giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao trong không gian hai chiều và ba chiều. Một số kết quả đạt từ chương này:

- Xây dựng phương pháp PGD cho một số phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao (phương trình Poisson và phương trình Biharmonic) trong không gian hai chiều và ba chiều.
- Kết hợp phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn để giải các bài toán: Phương trình Poisson hai chiều, phương trình Poisson ba chiều, bài toán tấm mỏng chịu uốn với điều kiện biên ngàm và gối tựa đơn, phương trình Biharmonic ba chiều.
- Luận án đã đánh giá sai số của lời giải đề xuất với lời giải chính xác, đồng thời so sánh về thời gian tính toán và sai số của phương pháp với các công bố khoa học trước đây. Từ đó cho thấy sự vượt trội về thời gian tính toán và sự tương đồng rất tốt về sai số của phương pháp đề xuất với các kết quả tham khảo. Cụ thể với bài toán 3D Poisson, lời giải PGD của bài toán đạt sai số $\|e_u\|_\infty = 2.334 \times 10^{-9}$ ở bước lưới 64×64 với thời gian

tính toán là 0.095 s, đồng thời lời giải PGD cho bài toán 3D Biharmonic cũng đạt sai số rất bé $\|e_u\|_\infty = 1.44 \times 10^{-9}$ với thời gian tính toán 0.156 s ở bước lưới 64×64 .

Các công bố khoa học đã được thực hiện ở chương này:

1. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huỳnh và Nguyễn Bá Duy, “Giải phương trình 3D Biharmonic bằng phương pháp PGD kết hợp HO CFD,” *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam*.

2. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Nguyễn Bá Duy và Phan Đức Huỳnh, “Phương pháp PGD kết hợp HO CFD cho bài toán tấm mỏng chịu uốn,” *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam*.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN

3.1. Giới thiệu

Trong thực tế, lời giải phương trình Navier-Stokes là một bài toán thường gặp trong nhiều bài toán vật lý. Đã có nhiều phương pháp số khác nhau để giải quyết bài toán Navier-Stokes như phương pháp sai phân hữu hạn (Finite difference method – FDM), phương pháp thể tích hữu hạn (Finite volume method – FVM), phương pháp phần tử hữu hạn (Finite element method – FEM), phương pháp không lưới (Meshfree method), ... Tuy nhiên, các phương pháp nêu trên thường giải quyết mô hình bài toán trên toàn miền tính toán (hai chiều hoặc ba chiều), điều đó đòi hỏi bộ nhớ của máy tính phải đủ lớn đối với các bài toán có số điểm lưới rời rạc lớn. Cũng vì vậy mà thời gian và chi phí tính toán sẽ tăng lên.

Trong chương này, chúng ta sẽ áp dụng phương pháp PGD để giải phương trình Navier – Stokes cho bài toán dòng chảy nhớt không nén trong không gian hai chiều. Trong phương trình chuyển động của dòng chảy nhớt không nén, sự phân li giữa vận tốc và áp suất được trình bày bằng phương pháp chiếu. Sau đó, phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn được áp dụng để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng để tìm vận tốc và áp suất của dòng chảy.

3.2. Hệ phương trình Navier – Stokes cho bài toán dòng chảy nhớt không nén

Xét hệ phương trình Navier – Stokes trong không gian hai chiều như sau

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

ở đây $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ là vận tốc của lưu chất và $p(\mathbf{x}, t)$ là áp suất lưu chất. Các hệ số ρ và μ lần lượt là khối lượng riêng và độ nhớt của lưu chất.

3.3. Phương pháp chiếu (Projection method)

Khó khăn chủ yếu trong việc giải hệ phương trình Navier-Stokes đó là sự kết hợp của vận tốc – áp suất, để giải quyết vấn đề này, một phương pháp chiếu được đề xuất bởi Chorin [124] đã được sử dụng. Trong phương pháp chiếu, việc rời rạc hệ phương trình Navier-Stokes (3.1) và (3.2) được trình bày như sau

$$\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} - \rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n + \mu \Delta \mathbf{u}^n \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (3.4)$$

với điều kiện biên

$$\mathbf{u}^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b^{n+1} \quad (3.5)$$

Hệ phương trình (3.3) – (3.5) được giải theo trình tự như sau:

Bước 1: tính trực tiếp vận tốc trung gian \mathbf{u}^* từ phương trình động lượng (3.3) bỏ qua thành phần gradient áp suất

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}^n \quad (3.6)$$

ở đây \mathbf{u}^n là vận tốc ở bước thời gian thứ n . Ở bước thời gian tiếp theo, ta có

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (3.7)$$

Bước 2: Hiệu chỉnh áp suất

Từ phương trình (3.7) ta có

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (3.8)$$

Tiến hành lấy divergence ($\nabla \cdot$) cho cả hai vế của phương trình (3.8) dẫn đến

$$\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \Delta p^{n+1} \quad (3.9)$$

do điều kiện $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$, nên phương trình (3.9) trở thành

$$-\frac{1}{\rho} \Delta p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (3.10)$$

hay:

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (3.11)$$

Đây là phương trình Poisson cho áp suất, giải phương trình này chúng ta sẽ tìm được áp suất ở bước thời gian $n+1$.

Bước 3: Cập nhật vận tốc ở bước thời gian $n+1$

Với áp suất vừa tìm được từ phương trình (3.11), thay vào phương trình (3.7) ta có vận tốc ở bước thời gian $n+1$ được tính như sau

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (3.12)$$

Tóm lại, để giải hệ phương trình Navier – Stokes ở bước thời gian thứ $(n+1)$ gồm các bước sau:

Cập nhật vận tốc trung gian \mathbf{u}^* từ phương trình (3.6).

Giải phương trình Poisson cho áp suất (3.11) để tìm áp suất p^{n+1} .

Tính vận tốc \mathbf{u}^{n+1} sử dụng phương trình (3.12).

3.4. Rời rạc không gian

3.4.1. Lưới so le

Để thuận tiện, hệ phương trình Navier – Stokes được viết lại như sau

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \left(\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.14)$$

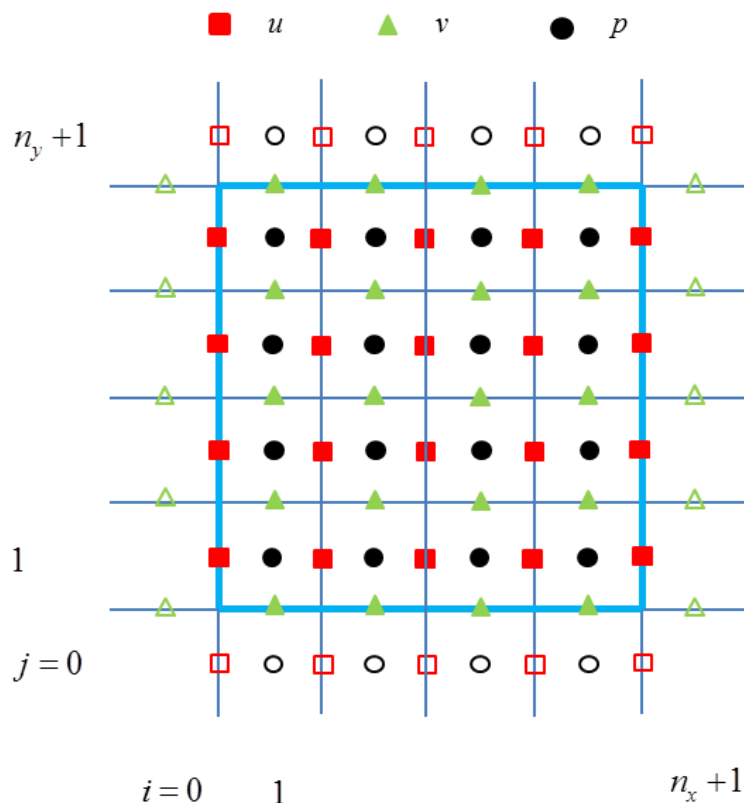
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

Để rời rạc hệ phương trình trên, có rất nhiều phương pháp có thể được sử dụng như phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp phân tử hữu hạn, phương pháp thể tích hữu hạn, phương pháp phổ, phương pháp không lưới,... Trong khuôn khổ luận án này, phương pháp sai phân hữu hạn sẽ được sử dụng để giải các phương trình.

Các phương trình được rời rạc trên lưới Đề các đều sử dụng các xấp xỉ sai phân hữu hạn cho đạo hàm bậc nhất và bậc hai. Tuy nhiên, việc sử dụng lưới đều ở tất cả các biến được định nghĩa ở cùng vị trí sẽ làm tăng sự bất ổn định do sự phân ly chẵn-lẻ của áp suất. Sự phân ly chẵn-lẻ xuất phát từ thực tế rằng áp suất phụ thuộc vào đạo hàm bậc nhất của vận tốc và ngược lại. Nếu sai phân trung tâm được sử dụng, áp suất ở các nút lẻ hoặc chẵn phụ thuộc vào vận tốc ở các nút chẵn hoặc lẻ. Điều này cũng tương tự cho vận tốc. Vì vậy, chúng ta sẽ sử dụng lưới so le để rời rạc miền tính toán.

Khi giải hệ phương trình Navier – Stokes, rời rạc không gian được thực hiện trên lưới so le, với áp suất p nằm chính giữa của ô lưới, còn vận tốc u được đặt ở vị trí trung điểm đường phân cách ô theo phương thẳng đứng, và vận tốc v được đặt ở vị trí trung điểm đường phân cách ô theo phương ngang.

Xét lưới xen kẽ có $n_x \times n_y$ ô lưới được trình bày như trong hình 3.1. Khi nói đến trường áp suất p , vận tốc u và v , ta cần phải quan tâm đến các điểm bên trong và các điểm biên. Trong hình 3.1 các điểm được đánh dấu đậm là các điểm bên trong, còn các điểm được đánh dấu nhạt hơn là các điểm biên.



Hình 3.1: Lưới so le.

3.4.2. Xấp xỉ đạo hàm

3.4.2.1. Đạo hàm bậc hai

Sai phân hữu hạn có thể xấp xỉ đạo hàm bậc hai tại một điểm lưới bằng sơ đồ sai phân trung tâm. Ở một điểm bên trong miền tính toán $u_{i,j}$ chúng ta xấp xỉ các đạo hàm bậc hai như sau

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (3.17)$$

$$\Delta u_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (3.18)$$

Công thức (3.18) cũng áp dụng tương tự cho thành phần vận tốc v và áp suất p như sau

$$\Delta v_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (3.19)$$

$$\Delta p_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (3.20)$$

3.4.2.2. Đạo hàm bậc nhất

Đạo hàm bậc nhất tại một điểm lưới có thể xấp xỉ theo sai phân trung tâm như sau

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} \quad (3.21)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h_x} \quad (3.23)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h_y} \quad (3.24)$$

Giả sử, chúng ta không quan tâm đến giá trị $\frac{\partial u}{\partial x}$ tại vị trí của $u_{i,j}$, mà chúng ta muốn giá trị tại điểm giữa của hai điểm $u_{i+1,j}$ và $u_{i,j}$, khi đó chúng ta sẽ sử dụng lưới so le và các đạo hàm có thể xấp xỉ như sau

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} \quad (3.25)$$

Tương tự, chúng ta có

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} \quad (3.26)$$

Khi đó phương trình liên tục được đánh giá ở tâm ô (i, j) như sau

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} \quad (3.27)$$

3.4.2.3. Đạo hàm của các thành phần phi tuyến (theo sơ đồ sai phân trung tâm)

Các thành phần phi tuyến không được định nghĩa trực tiếp trên lưới so le. Chẳng hạn, tích số của uv không được định nghĩa trực tiếp vì u và v nằm ở những vị trí khác nhau. Để cập nhật u , chúng ta cần $\partial u^2/\partial x$ và $\partial uv/\partial y$. Điều này yêu cầu u^2 phải được định nghĩa ở tâm của các ô lưới, và uv được định nghĩa ở góc các ô lưới. Chúng ta đạt được những đại lượng này bằng cách thực hiện phép nội suy giữa hai giá trị lân cận như sau

$$(u^2)_{i+\frac{1}{2},j} = \left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}\right)^2 \quad (3.28)$$

$$(u)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} \quad (3.29)$$

$$(v)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \quad (3.30)$$

Tương tự cho thành phần vận tốc v . Bây giờ chúng ta sử dụng dấu gạch ngang cùng với chỉ số trên h để kí hiệu cho đại lượng trung bình theo phương

ngang, và dấu gạch ngang cùng với chỉ số trên v để kí hiệu cho đại lượng trung bình theo phương thẳng đứng, sau đây chúng ta có thể viết lại các thành phần phi tuyến như sau

$$\frac{\partial(u)^2}{\partial x} = \frac{\partial(\bar{u}^h)^2}{\partial x} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y} = \frac{\partial(\bar{u}^v \bar{v}^h)}{\partial y} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial(v)^2}{\partial y} = \frac{\partial(\bar{v}^v)^2}{\partial y} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} = \frac{\partial(\bar{u}^v \bar{v}^h)}{\partial x} \quad (3.34)$$

ở đây

$$(\bar{u}^h)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} \quad (3.35)$$

$$(\bar{v}^h)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_{i+1,j} + v_{i,j}}{2} \quad (3.36)$$

$$(\bar{u}^v)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j}}{2} \quad (3.37)$$

$$(\bar{v}^v)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,j+1} + v_{i,j}}{2} \quad (3.38)$$

3.4.2.4. Đạo hàm các thành phần phi tuyến (theo sơ đồ sai phân ngược)

Sơ đồ sai phân trung tâm được xấp xỉ nếu các đại lượng không thay đổi quá lớn ở mỗi bước thời gian. Với các trường hợp dòng chảy nhanh hơn hoặc bước thời gian lớn hơn, việc rời rạc sẽ tốt hơn khi chúng ta thực hiện theo sơ đồ sai phân

ngược. Vì vậy, chúng ta sẽ thực hiện một sự chuyển đổi giữa sai phân trung tâm và sai phân ngược bằng cách sử dụng tham số $\gamma \in [0,1]$. Chúng ta định nghĩa như sau

$$\gamma = \min\left(1.2 \cdot \Delta t \cdot \max\left(\max_{i,j} |u_{i,j}|, \max_{i,j} |v_{i,j}|\right), 1\right) \quad (3.39)$$

ở đây hệ số 1.2 được lấy từ thực nghiệm.

Tương ứng với các đại lượng trung bình, ta định nghĩa các đại lượng sai phân

$$\left(\tilde{u}^h\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2} \quad (3.40)$$

$$\left(\tilde{v}^h\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{2} \quad (3.41)$$

$$\left(\tilde{u}^v\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{2} \quad (3.42)$$

$$\left(\tilde{v}^v\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{2} \quad (3.43)$$

Sử dụng tổ hợp tuyến tính giữa sai phân trung tâm và sai phân ngược, các phương trình (3.31) – (3.34) trở thành

$$\frac{\partial(u)^2}{\partial x} = \frac{\partial\left((\bar{u}^h)^2 - \gamma|\bar{u}^h|\tilde{u}^h\right)}{\partial x} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\bar{u}^v\bar{v}^h - \gamma|\bar{v}^h|\tilde{u}^v\right)}{\partial y} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial(v)^2}{\partial y} = \frac{\partial\left((\bar{v}^v)^2 - \gamma|\bar{v}^v|\tilde{v}^v\right)}{\partial y} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\bar{u}^v\bar{v}^h - \gamma|\bar{u}^v|\tilde{v}^h\right)}{\partial x} \quad (3.47)$$

Một điều dễ thấy rằng các công thức (3.44) – (3.47) sẽ trở thành sai phân trung tâm khi $\gamma = 0$ và sai phân ngược khi $\gamma = 1$.

3.5. Điều kiện biên

Để giải các phương trình rời rạc, các điều kiện được yêu cầu ở các biên vật lý. Việc áp dụng các điều kiện biên đúng rất quan trọng, vì với lưới so le một số điểm nằm trên biên trong khi một số điểm khác có biên nằm ở giữa các điểm lưới. Ở những điểm nằm trên biên thì giá trị của nó được mô tả một cách trực tiếp, trong khi có những trường hợp, điều kiện biên phải được định nghĩa một giá trị ở giữa hai điểm lưới. Trong khuôn khổ luận án này, năm loại điều kiện biên được xét là điều kiện dòng vào (inflow), điều kiện biên không trượt (no-slip), điều kiện biên dòng tự do (free-slip), điều kiện biên dòng ra (outflow) và điều kiện biên tuần hoàn (periodic boundary).

Điều kiện biên dòng vào $(u, v) = (U_\infty, V_\infty)$: các thành phần vận tốc được chỉ rõ ở biên. Với thành phần vận tốc pháp tuyến, các giá trị được cố định trực tiếp trên biên. Với thành phần vận tốc tiếp tuyến, chúng ta lấy giá trị trung bình ở hai bên

$$\text{Biên trái: } u_{0,j} = U_\infty, v_{0,j} = 2V_\infty - v_{1,j} \quad (3.48)$$

$$\text{Biên phải: } u_{n_x,j} = U_\infty, v_{n_x+1,j} = 2V_\infty - v_{n_x,j} \quad (3.49)$$

$$\text{Biên dưới: } u_{i,0} = 2U_\infty - u_{i,1}, v_{i,0} = V_\infty \quad (3.50)$$

$$\text{Biên trên: } u_{i,n_y+1} = 2U_\infty - u_{i,n_y}, v_{i,n_y} = V_\infty \quad (3.51)$$

Điều kiện biên không trượt $(u, v) = (U_b, V_b)$: các điều kiện biên Dirichlet được áp đặt.

$$\text{Biên trái: } u_{0,j} = U_b, v_{0,j} = 2V_b - v_{1,j} \quad (3.52)$$

$$\text{Biên phải: } u_{n_x,j} = U_b, v_{n_x+1,j} = 2V_b - v_{n_x,j} \quad (3.53)$$

$$\text{Biên dưới: } u_{i,0} = 2U_b - u_{i,1}, v_{i,0} = V_b \quad (3.54)$$

$$\text{Biên trên: } u_{i,n_y+1} = 2U_b - u_{i,n_y}, v_{i,n_y} = V_b \quad (3.55)$$

Điều kiện biên trượt tự do: Trong trường hợp này, dòng lưu chất được xem như chảy tự do trong chiều tiếp tuyến nhưng sẽ bị triệt tiêu theo chiều pháp tuyến với biên. Vì vậy, với biên trái và biên phải không chuyển động, chúng ta đặt $u = 0$ và $\partial v / \partial x = 0$, khi đó

$$\text{Biên trái: } u_{0,j} = 0, v_{0,j} = v_{1,j} \quad (3.56)$$

$$\text{Biên phải: } u_{n_x,j} = 0, v_{n_x+1,j} = v_{n_x,j} \quad (3.57)$$

Với biên trên và biên dưới không chuyển động, yêu cầu $\partial u / \partial y = 0$ và $v = 0$, khi đó

$$\text{Biên dưới: } u_{i,0} = u_{i,1}, v_{i,0} = 0 \quad (3.58)$$

$$\text{Biên trên: } u_{i,n_y+1} = u_{i,n_y}, v_{i,n_y} = 0 \quad (3.59)$$

Điều kiện biên dòng ra (hay điều kiện biên mở): rất nhiều bài toán lưu chất liên quan đến miền vật lý không biên, nhưng miền tính toán cần có một biên nhân tạo với một kích thước hữu hạn để trình bày các mô phỏng số. Áp đặt các điều kiện biên loại này là một thách thức, vì cả áp suất và vận tốc không được biết một cách rõ ràng cả về mặt vật lý và toán học. Trong luận án này, điều kiện biên Neumann ($\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n} = 0$) được sử dụng để miêu tả điều kiện biên dòng ra.

Với loại điều kiện biên Neumann, đạo hàm theo phương pháp tuyến của các thành phần vận tốc được áp đặt bằng không. Vì vậy, vận tốc trên các biên có thể được áp đặt bằng với giá trị lân cận bên trong miền tính toán.

$$\text{Biên trái: } u_{0,j} = u_{1,j}, v_{0,j} = v_{1,j} \quad (3.60)$$

$$\text{Biên phải: } u_{n_x,j} = u_{n_x-1,j}, v_{n_x+1,j} = v_{n_x,j} \quad (3.61)$$

$$\text{Biên dưới: } u_{i,0} = u_{i,1}, v_{i,0} = v_{i,1} \quad (3.62)$$

$$\text{Biên trên: } u_{i,n_y+1} = u_{i,n_y}, v_{i,n_y} = v_{i,n_y-1} \quad (3.63)$$

Điều kiện biên tuần hoàn: Các đại lượng dòng chảy ở trên biên có giá trị tương tự nhau. Ở biên trái và biên phải, vận tốc và áp suất được áp đặt như sau

$$u_{0,j} = u_{n_x-1,j}, v_{0,j} = v_{n_x-1,j}, p_{1,j} = p_{n_x,j} \quad (3.64)$$

$$u_{n_x,j} = u_{1,j}, v_{n_x+1,j} = v_{2,j}, p_{1,j} = p_{n_x,j} \quad (3.65)$$

Ở biên dưới và biên trên

$$v_{i,0} = v_{i,n_y-1}, u_{i,0} = u_{i,n_y-1}, u_{i,1} = u_{i,n_y} \quad (3.66)$$

$$v_{i,n_y} = v_{i,1}, u_{i,n_y+1} = u_{i,2}, p_{i,1} = p_{i,n_y} \quad (3.67)$$

Chú ý rằng, trong khi áp đặt rời rạc này, các biên của miền tính toán chồng lên một bề rộng ô lưới, điều này tương phản với trường hợp liên tục. Vì vậy, miền vật lý phải được chọn dài hơn một bề rộng ô.

3.6. Giải phương trình Poisson áp suất

Chúng ta thấy rằng một trong những bước quan trọng và mất nhiều thời gian tính toán để giải hệ phương trình Navier – Stokes đó là bước giải phương trình Poisson cho áp suất ở mỗi bước thời gian. Trong khuôn khổ luận án này, các phương trình vi phân đạo hàm riêng nói chung hay phương trình Poisson nói riêng được giải bằng phương pháp PGD. Dưới đây là giải thuật chi tiết để giải phương trình Poisson trong không gian hai chiều.

Xét phương trình Poisson trong không gian hai chiều như sau

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ trong miền } \Omega = \Omega_x \times \Omega_y \quad (3.68)$$

Mục tiêu của chúng ta là áp dụng phương pháp PGD để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình (3.68). Giả sử nghiệm xấp xỉ của phương trình được viết dưới dạng tách biến như sau

$$p(x, y) \approx \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y) \quad (3.69)$$

Giả sử lời giải ở bước lặp thứ n đã biết, chúng ta cần tìm lời giải ở bước lặp thứ $n+1$

$$p^{n+1}(x, y) \approx \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot Y_i(y) + R(x) \cdot S(y) \quad (3.70)$$

$$\text{ở đây: } R(x) = X_{n+1}(x) \text{ và } S(y) = Y_{n+1}(y) \quad (3.71)$$

Để tìm các cặp hàm $R(x)$ và $S(y)$, chúng ta sử dụng giải thuật lặp cố định luân phiên gồm các bước sau:

Bước 1: Tìm hàm $R(x)$

Giả sử $S(y)$ đã biết, khi đó $R(x)$ được tìm từ phương trình sau

$$a_x \frac{d^2 R}{dx^2} + b_x R = c_x(x) - \sum_{i=1}^n a_x^i \frac{d^2 X_i}{dx^2} - \sum_{i=1}^n b_x^i X_i \quad (3.72)$$

ở đây

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \int_{\Omega_y} S^2 dy \\ b_x = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} dy \\ c_x(x) = \int_{\Omega_y} S \cdot f(x, y) dy \\ a_x^i = \int_{\Omega_y} S \cdot Y_i dy \\ b_x^i = \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy \end{array} \right. \quad (3.73)$$

Bước 2: Tìm hàm $S(y)$

Với $R(x)$ vừa tìm được ở bước trên, khi đó hàm $S(y)$ được tìm từ phương trình sau

$$a_y \frac{d^2 S}{dy^2} + b_y R = c_y(y) - \sum_{i=1}^n a_y^i \frac{d^2 Y_i}{dy^2} - \sum_{i=1}^n b_y^i Y_i \quad (3.74)$$

ở đây

$$\left\{ \begin{array}{l} a_y = \int_{\Omega_x} R^2 dx \\ b_y = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 R}{dx^2} dx \\ c_y(y) = \int_{\Omega_x} R \cdot f(x, y) dx \\ a_y^i = \int_{\Omega_x} R \cdot X_i dx \\ b_y^i = \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Các hàm $R(x)$ và $S(y)$ được tìm bằng cách giải các phương trình vi phân một chiều (3.72) và (3.74). Trong khuôn khổ luận án này, chúng ta sẽ sử dụng

phương pháp sai phân hữu hạn để giải các phương trình vi phân một chiều nói trên. Các bước giải để tìm $R(x)$ và $S(y)$ được lặp cho đến khi kết quả hội tụ. Nếu kí hiệu $R^{(q)}(x)$ và $R^{(q-1)}(x)$ là hàm $R(x)$ đã được tính ở bước lặp hiện tại và bước lặp trước, tương tự với $S^{(q)}(y)$ và $S^{(q-1)}(y)$, tiêu chuẩn dừng được chọn như sau

$$e = \left\| R^{(q)}(x) \cdot S^{(q)}(y) - R^{(q-1)}(x) \cdot S^{(q-1)}(y) \right\| < \varepsilon_{RS} \quad (3.76)$$

ở đây ε_{RS} là hằng số được chọn đủ bé để đảm bảo độ chính xác.

Sau khi các bước lặp tìm $R(x)$ và $S(y)$ hội tụ, chúng ta xác định được $X_{n+1}(x) = R(x)$ và $S_{n+1}(y) = R(y)$. Quá trình tìm các cặp hàm $(X_i(x), Y_i(y))$ phải được tiếp tục cho đến khi đạt được sự hội tụ toàn cục của bài toán ở bước lặp thứ N , khi đó nghiệm xấp xỉ của bài toán được tính như sau

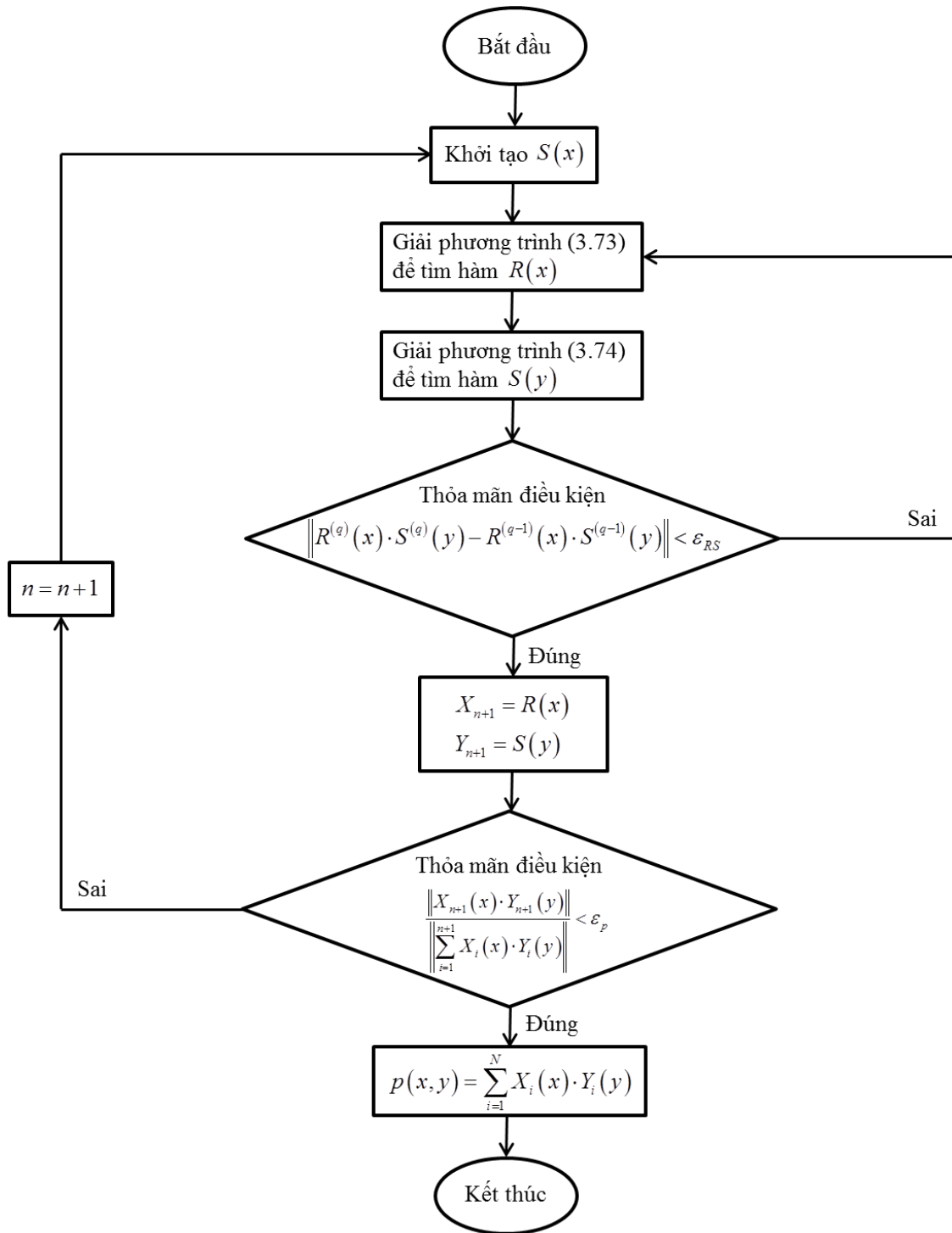
$$p(x, y) \approx \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y) \quad (3.77)$$

Điều kiện dừng toàn cục của bài toán được tính như sau

$$E = \frac{\left\| X_n(x) \cdot Y_n(y) \right\|_2}{\left\| \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot Y_i(y) \right\|_2} < \varepsilon_p \quad (3.78)$$

ở đây ε_p là một hằng số được chọn đủ nhỏ và res là hàm thặng dư của bài toán

Sơ đồ giải thuật phương pháp PGD giải phương trình Poisson áp suất trong không gian hai chiều được trình bày như hình 3.2.



Hình 3.2: Sơ đồ giải thuật phương pháp PGD cho phương trình Poisson áp suất trong không gian hai chiều.

3.7. Giải thuật tổng quát

Giả sử ở bước thời gian thứ n , u^n và p^n đã biết và chúng ta cần tìm u^{n+1} và p^{n+1} . Để thực hiện điều này, chúng ta tiến hành theo các bước sau

Bước 1: Vận tốc trung gian u^* được tính toán từ phương trình (3.6).

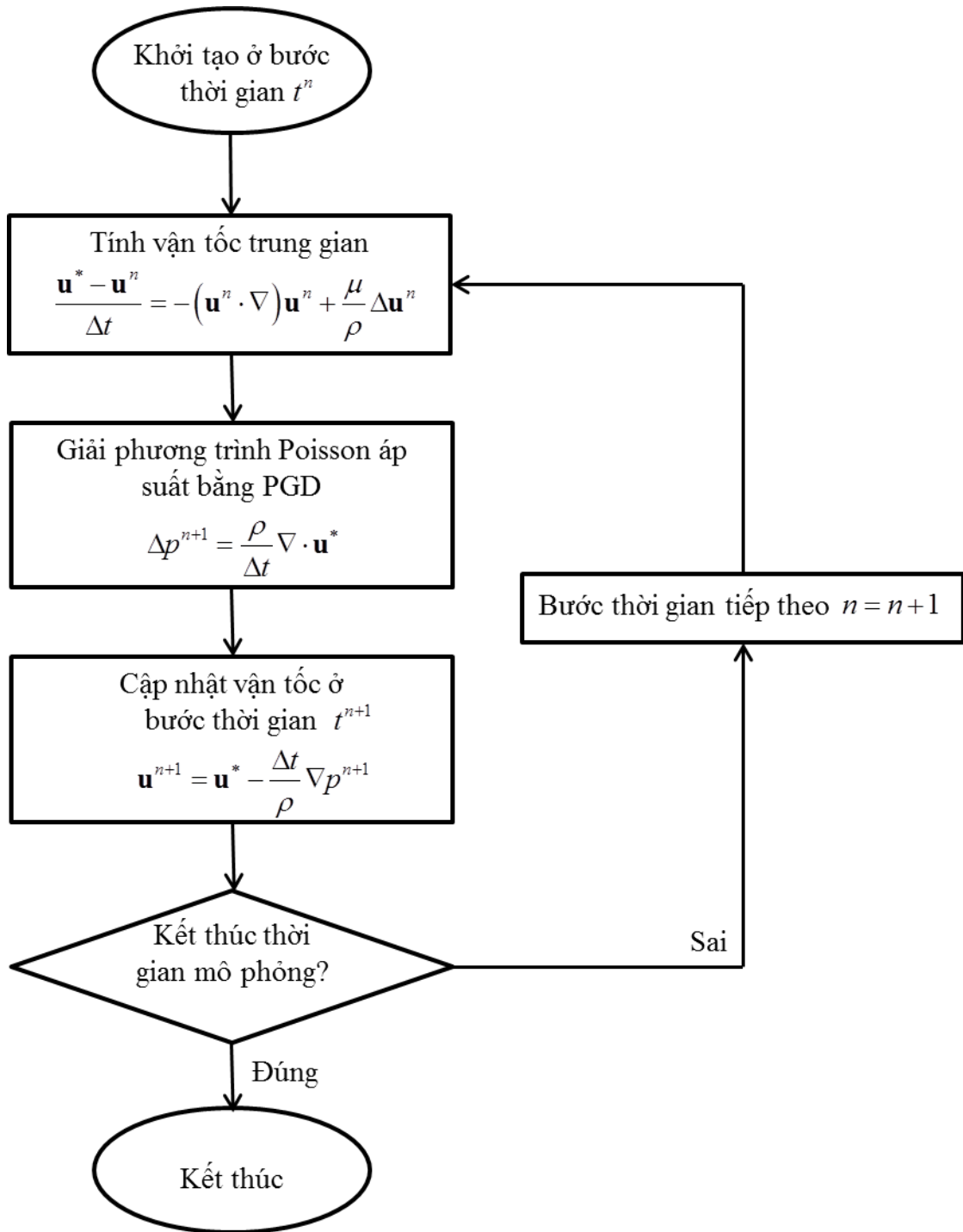
Bước 2: Áp dụng phương pháp PGD để tìm áp suất p^{n+1} ở dạng

$$p^{n+1} = \sum_{i=1}^N F^i(x) \cdot G^i(y) \quad (3.79)$$

Bước này được thực hiện bằng cách giải phương trình (3.11).

Bước 3: Trường vận tốc u^{n+1} được cập nhật từ phương trình (3.12).

Hình 3.3 trình bày sơ đồ giải thuật của phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén. Trong sơ đồ giải thuật, các bước giải cho bài toán dòng chảy nhớt không nén đã được trình bày. Chi tiết về giải thuật giải phương trình Poisson cho áp suất đã được trình bày cụ thể ở mục 3.6.



Hình 3.3: Sơ đồ giải thuật phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén.

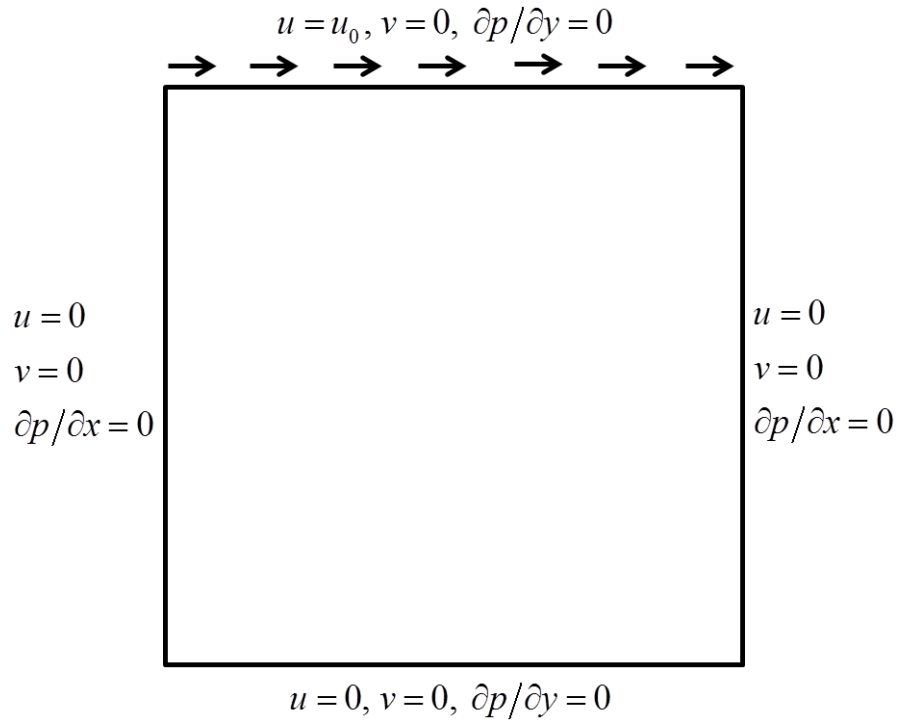
3.8. Kết quả mô phỏng số

3.8.1. Bài toán Lid-driven cavity flow

Trong phần này, bài toán dòng chảy trong một miền vuông được mô phỏng. Miền vật lý và điều kiện biên của bài toán được trình bày như hình 3.4. Dòng chảy được dẫn bởi biên trên di chuyển với vận tốc không đổi u_0 . Bên trong miền sẽ hình thành nên các xoáy nước, vị trí và kích thước của xoáy phụ thuộc vào hệ số Reynolds.

Chúng ta sẽ tiến hành mô phỏng bài toán ở các hệ số Reynolds $Re = \rho u_0 L / \mu$ khác nhau, ở đây L là chiều dài cạnh hình vuông của miền tính toán. Xét miền tính toán là một miền vuông $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ cho bài toán dòng chảy nhớt không nén với điều kiện biên Dirichlet cho vận tốc và điều kiện biên Neumann thuần nhất cho áp suất. Ở đây, hai thành phần vận tốc đều triệt tiêu trên biên, ngoại trừ thành phần vận tốc theo phương ngang ở cạnh trên của miền tính toán bằng $u_0 = 1$. Mô phỏng được thực hiện với lưới 251×251 và bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

Các hình 3.5 đến 3.9 trình bày đường dòng và xoáy của bài toán ở các hệ số Reynolds $Re = 100, 400, 1000, 3200$ và 5000 . Chúng ta thấy rằng ở các hệ số Reynolds thấp $Re = 100, 400$ và 1000 xuất hiện ba xoáy nước gồm một xoáy ở gần trung tâm miền tính toán và hai xoáy ở góc dưới của miền. Khi gia tăng hệ số Reynolds, xoáy trung tâm có xu hướng di chuyển xuống phía dưới, trong khi hai xoáy ở góc bên dưới có xu hướng phát triển rộng ra. Ở các hệ số Reynolds trên 1000 sẽ xuất hiện thêm một xoáy ở góc trái bên trên miền tính toán.

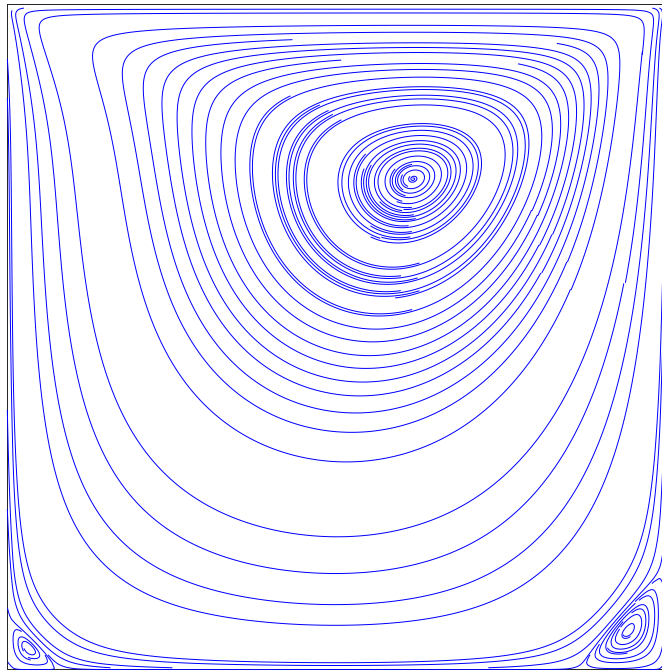


Hình 3.4: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán Lid-driven cavity flow.

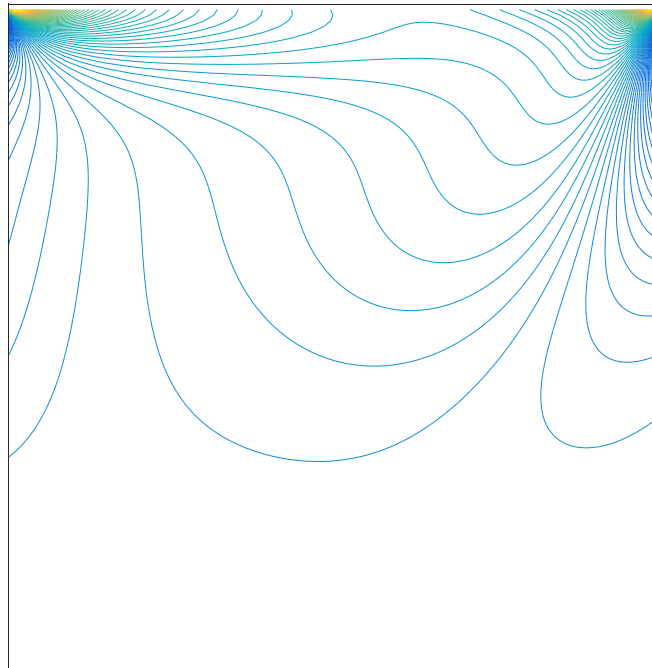
Bảng 3.1: Tọa độ tâm xoáy trung tâm của bài toán Lid-driven cavity flow ở các hệ số Reynolds khác nhau.

Tác giả		Re = 100	Re = 400	Re = 1000	Re = 3200	Re = 5000
x_c	Ghia và cộng sự [125]	0.617	0.555	0.531	0.517	0.512
	Bruneau và cộng sự [126]	-	-	0.469	-	0.484
	Luận án	0.616	0.5558	0.532	0.518	0.514
y_c	Ghia và cộng sự [125]	0.734	0.606	0.563	0.547	0.535
	Bruneau và cộng sự [126]	-	-	0.563	-	0.539
	Luận án	0.738	0.605	0.566	0.540	0.534

Hình 3.10 và hình 3.11 lần lượt trình bày vận tốc theo phương ngang và vận tốc theo phương thẳng đứng tại vị trí trung tâm của miền tính toán và được so sánh với kết quả của Ghia và các cộng sự [125]. Chúng ta thấy rằng kết quả mô phỏng của luận án có sự tương đồng rất tốt với kết quả tham khảo của Ghia cùng cộng sự. Bảng 3.1 trình bày vị trí của tâm xoáy trung tâm (x_c, y_c) ở các hệ số Reynolds khác nhau. Từ kết quả ở bảng trên cho thấy sự tương đồng rất tốt của kết quả của luận án với các kết quả tham khảo của Ghia cùng cộng sự [125] và kết quả của Bruneau cùng cộng sự [126].

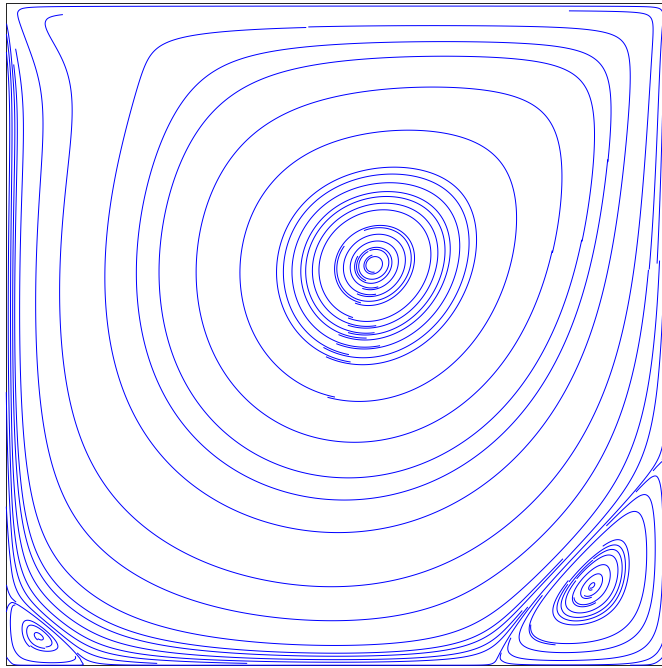


(a) Đường dòng

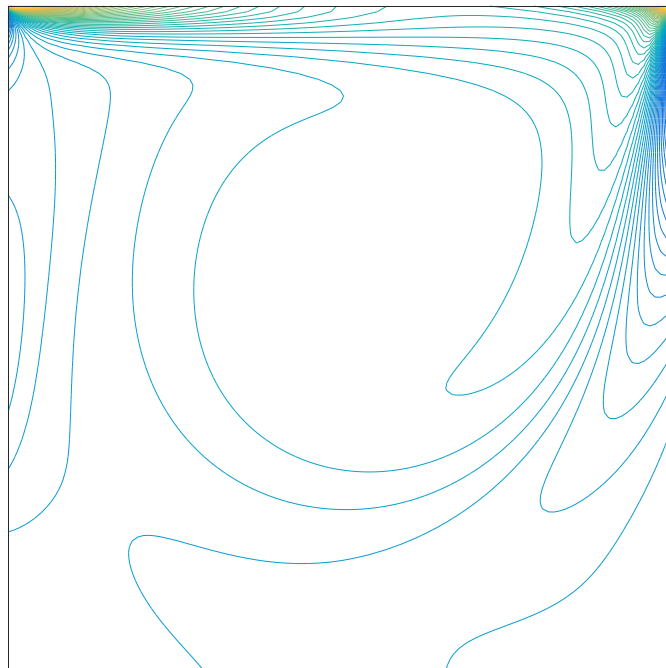


(b) Đường bao xoáy

Hình 3.5: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 100$.

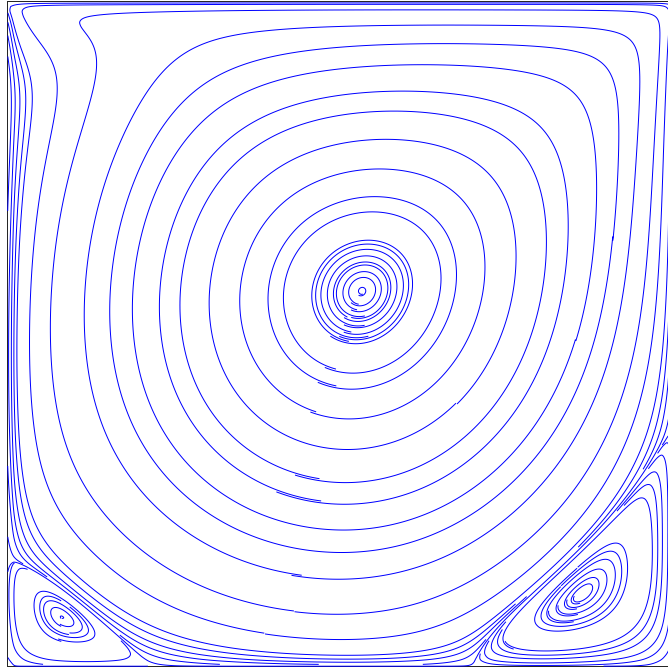


(a) Đường dòng

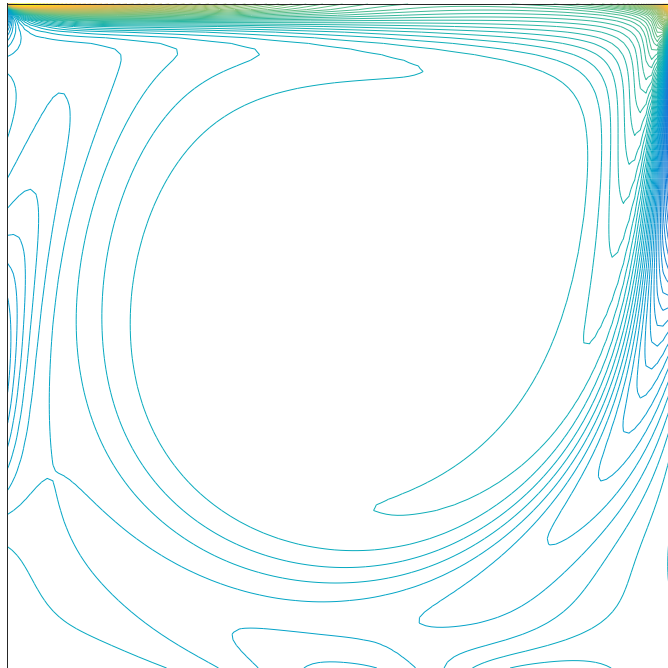


(b) Đường bao xoáy

Hình 3.6: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 400$.

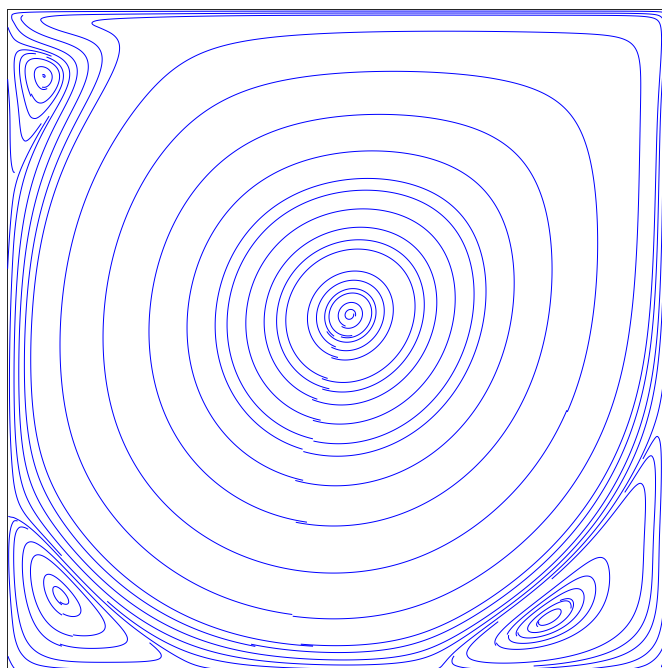


(a) Đường dòng

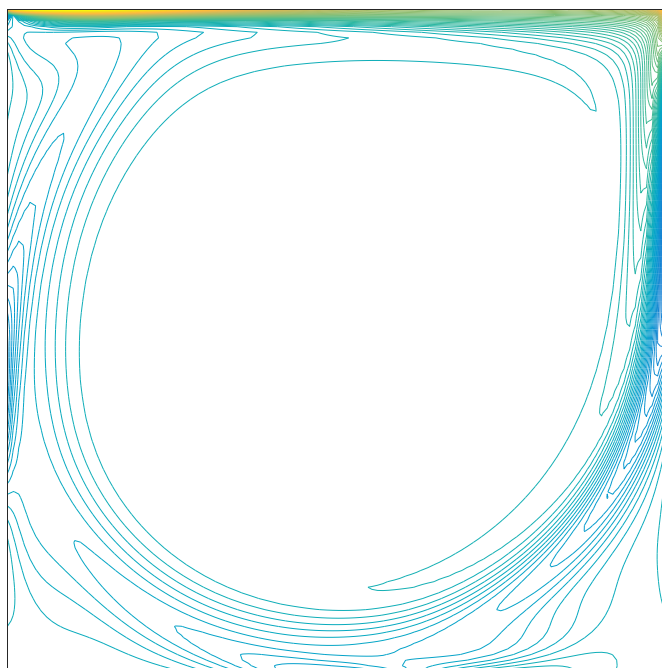


(b) Đường bao xoáy

Hình 3.7: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 1000$.

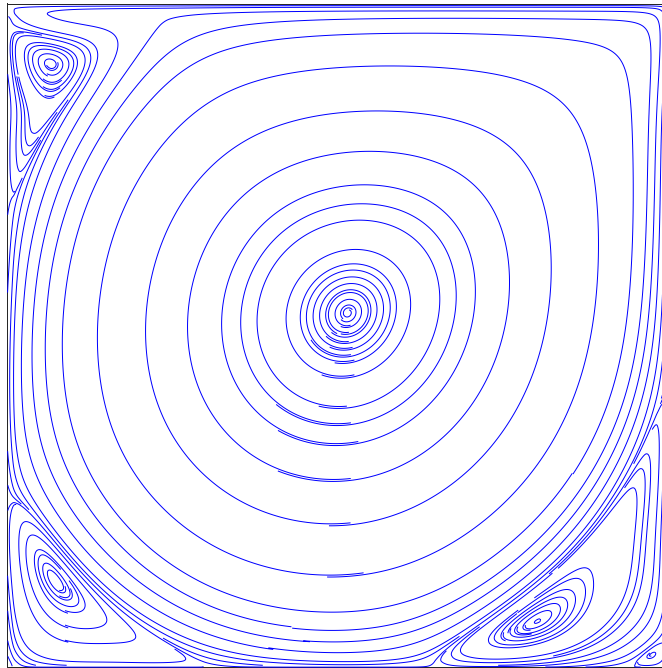


(a) Đường dòng

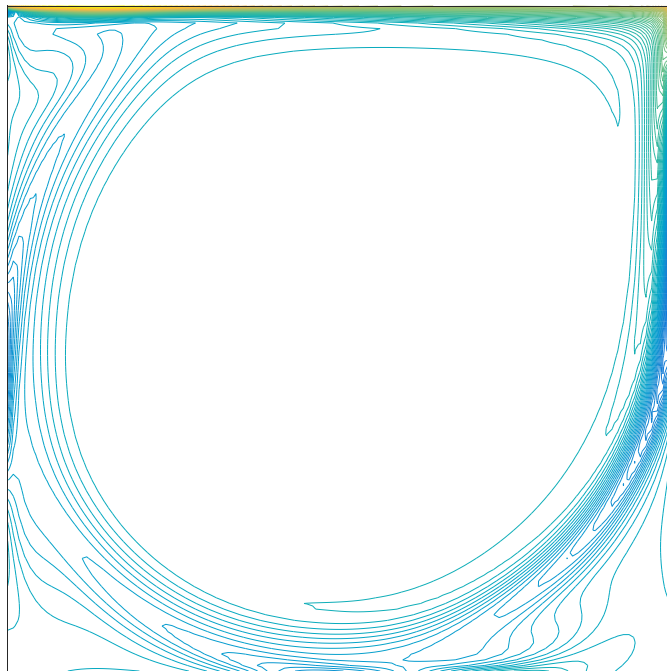


(b) Đường bao xoáy

Hình 3.8: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 3200$.

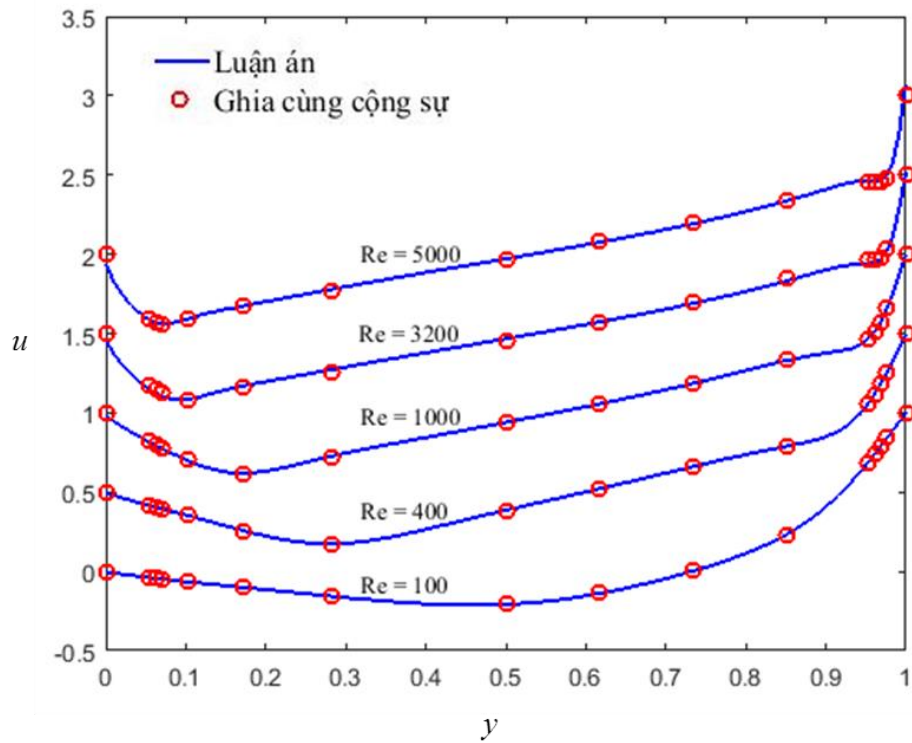


(a) Đường dòng

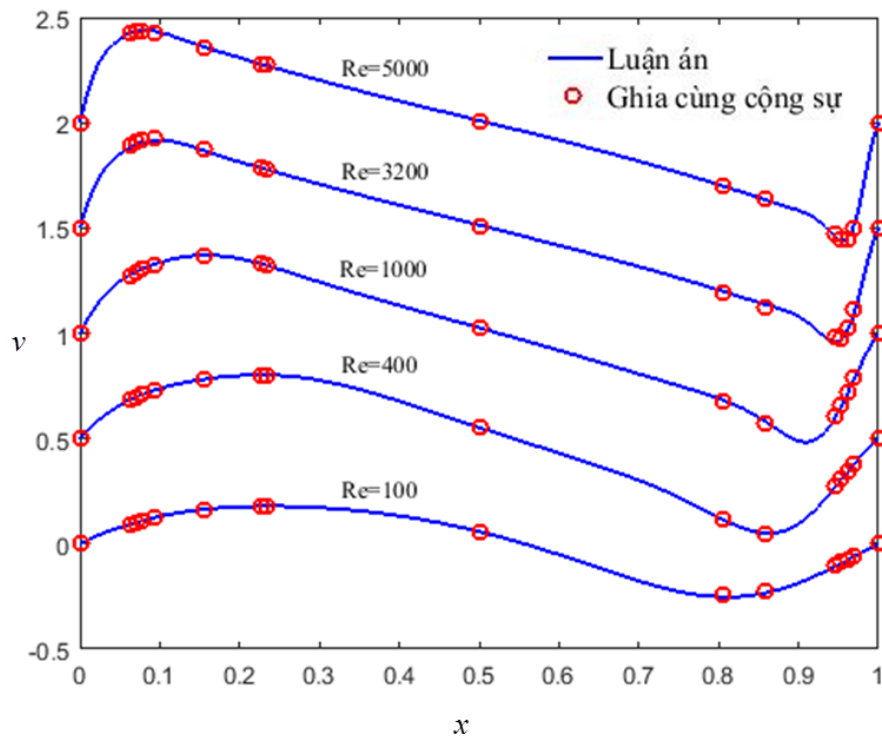


(b) Đường bao xoáy

Hình 3.9: Kết quả đường dòng và đường bao xoáy của bài toán Lid-driven cavity flow ở hệ số $Re = 5000$.



Hình 3.10: So sánh vận tốc theo chiều trục x dọc theo đường thẳng $x = 0.5$ ở các hệ số $Re = 100, Re = 400, Re = 1000, Re = 3200$ và $Re = 5000$.

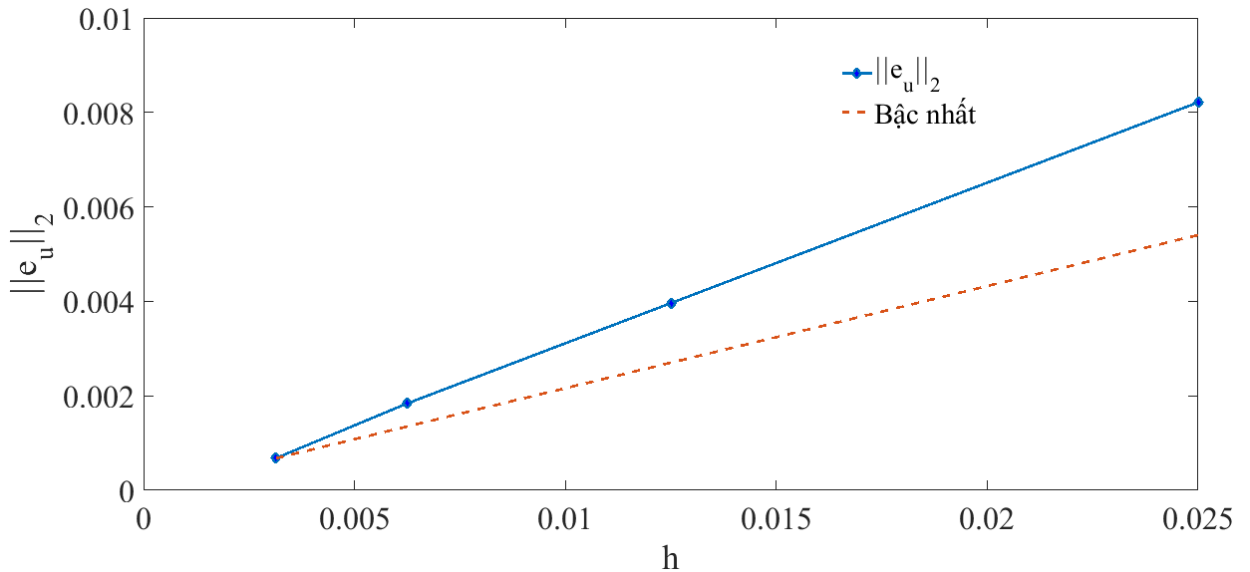


Hình 3.11: So sánh vận tốc theo chiều trục y dọc theo đường thẳng $y = 0.5$ ở các hệ số $Re = 100, Re = 400, Re = 1000, Re = 3200$ và $Re = 5000$.

Để đánh giá ảnh hưởng của bước lưới đến độ chính xác của lời giải, chúng ta sẽ tiến hành khảo sát bài toán ở hệ số $Re=100$ với các bước lưới khác nhau $h = \{0.02500, 0.01250, 0.00625, 0.003125\}$. Vì bài toán không có lời giải chính xác nên chúng ta sử dụng lời giải ở bước lưới $h = 0.0015625$ như lời giải tham khảo để tính toán sai số. Bài toán được khảo sát đến thời điểm $t = 0.2$ s với bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s để đảm bảo sự ổn định của bài toán ở các bước lưới nhỏ. Để đánh giá độ chính xác, sai số vận tốc theo phương x được định nghĩa như sau

$$\|e_u\|_2 = \sqrt{\frac{1}{n_x \times n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} (u_{i,j} - u_{i,j}^{ref})^2}$$

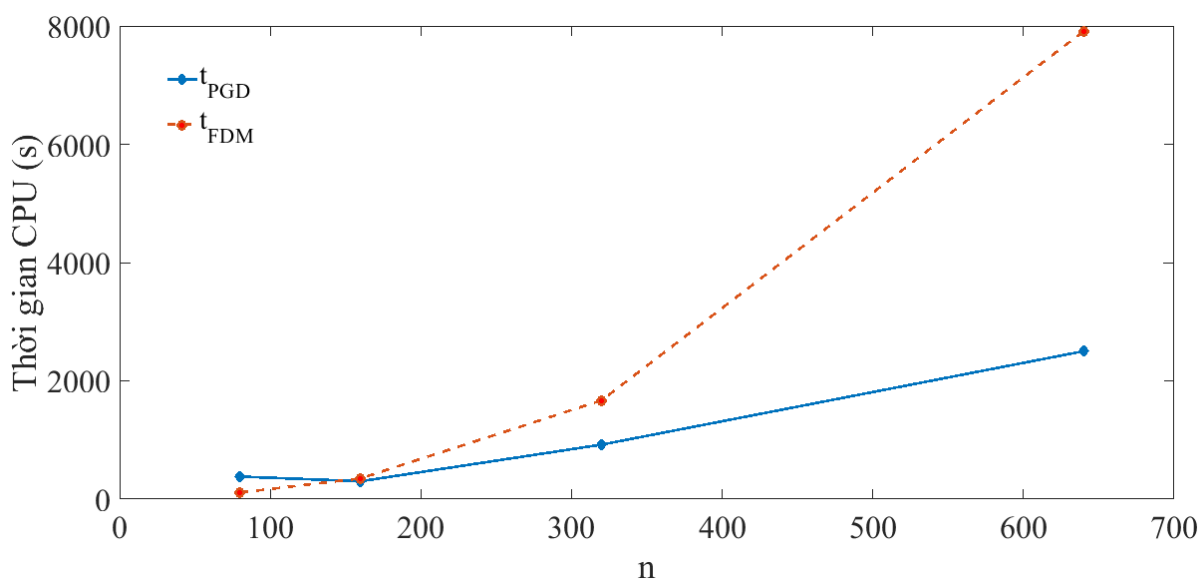
Hình 3.12 trình bày các giá trị sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang. Từ kết quả ở hình 3.12 cho thấy sai số có bậc hội tụ khoảng 1.44.



Hình 3.12: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán Lid-driven cavity.

Để đánh giá tốc độ tính toán của phương pháp PGD so với phương pháp sai phân hữu hạn, bài toán Lid-driven cavity ở hệ số Reynolds $Re = 100$ sẽ được khảo sát đến thời điểm $t = 0.2$ s với bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s. Hình 3.13 trình bày thời gian tính toán ở các bước lưới khác nhau, trong đó t_{PGD} và t_{FDM} lần lượt là thời

gian tính toán của phương pháp PGD và phương pháp sai phân hữu hạn. Từ kết quả ở hình 3.13 cho thấy thời gian tính toán của phương pháp PGD và phương pháp sai phân hữu hạn xấp xỉ nhau ở số điểm lưới 160×160 . Tuy nhiên, khi số điểm lưới tăng lên cho thấy thời gian tính toán của phương pháp PGD giảm đáng kể so với phương pháp sai phân hữu hạn, cụ thể $t_{FDM} / t_{PGD} = 1.8$ ở số điểm lưới 320×320 và $t_{FDM} / t_{PGD} = 3.1$ ở số điểm lưới 640×640 .

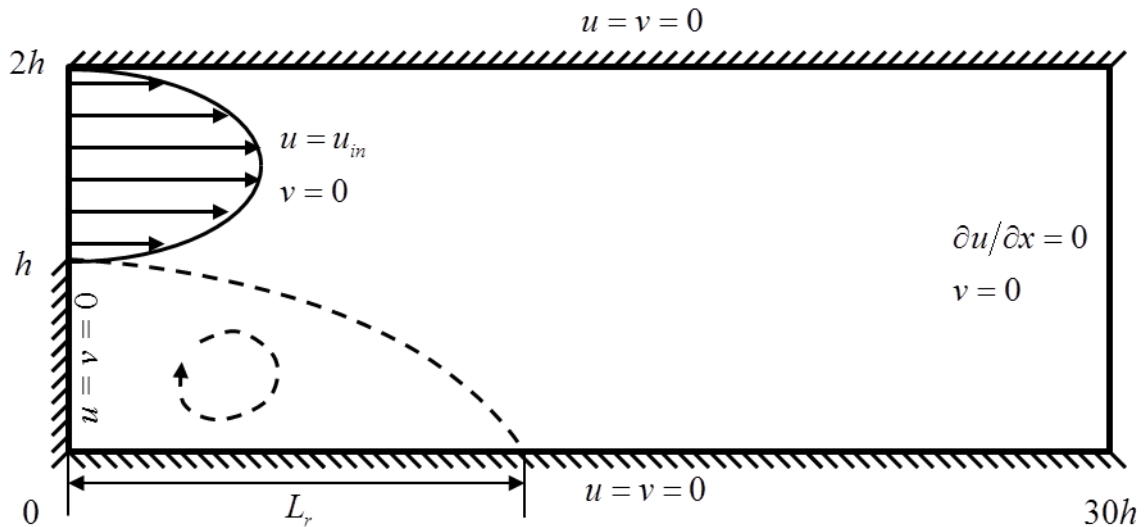


Hình 3.13: Thời gian tính toán của bài toán Lid-driven cavity ở hệ số $Re = 100$.

3.8.2. Bài toán Backward-facing step flow

Trong phần này, dòng chảy qua một miền bậc thang được mô tả như hình 3.14. Miền dòng chảy được cho như sau $[0, 30h] \times [0, 2h]$, ở đây h là chiều cao của bậc. Các điều kiện biên không trượt được áp dụng cho cả biên trên và biên dưới. Trường vận tốc vào ở biên trái được mô tả là một dòng chảy song song với thành phần vận tốc theo phương ngang và được định nghĩa như sau

$$u(y) = 24y(0.5 - y) \text{ với } 0 \leq y \leq 0.5 \quad (3.88)$$



Hình 3.14: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán Backward-facing step flow.

Thành phần vận tốc theo phương ngang này có biên dạng là parabol với vận tốc vào cực đại là $u_{max} = 1.5$ và vận tốc vào trung bình là $u_{avg} = 1.0$. Điều kiện biên dòng ra được áp đặt cho biên phải của miền tính toán. Hệ số Reynolds được định nghĩa bởi quan hệ sau

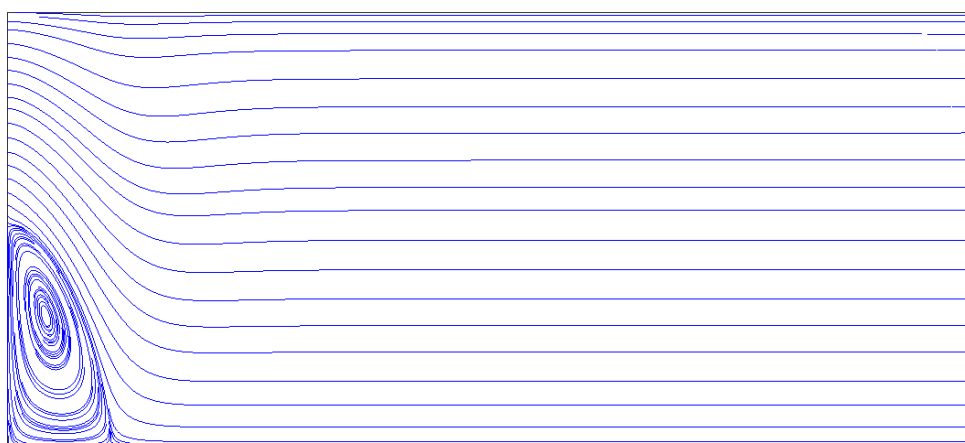
$$Re = \rho u_{avg} H / \mu \quad (3.89)$$

ở đây $H = 2h$ là chiều cao của kênh.

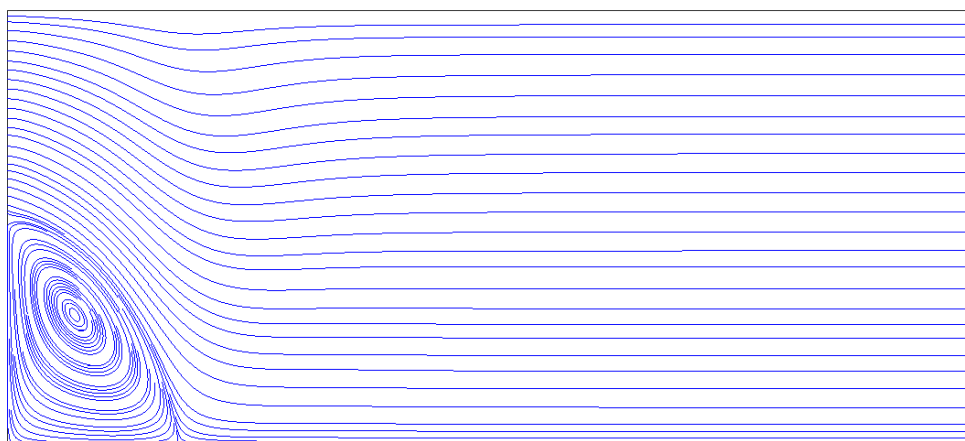
Sau đây bài toán sẽ được mô phỏng ở các hệ số Reynolds khác nhau. Lưới 1201×81 được sử dụng để rời rạc miền tính toán và bước thời gian được chọn là $\Delta t = 10^{-3}$.

Các hình 3.15 đến 3.22 trình bày đường dòng ở các hệ số Reynolds khác nhau trong dải từ 100 đến 800. Ở hệ số $Re = 100$ một xoáy nhỏ được hình thành sau bậc. Kích thước của xoáy gia tăng khi tăng hệ số Reynolds. Từ khoảng $Re = 400$, chúng ta thấy xuất hiện thêm một xoáy thứ hai ở biên trên của miền dòng chảy và kích thước của các xoáy này cũng gia tăng khi tăng hệ số Reynolds từ $Re = 400$ đến 800.

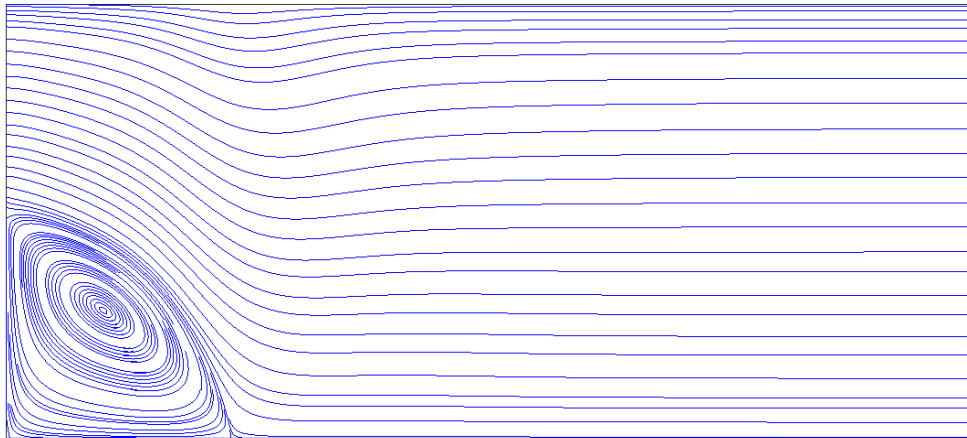
Chúng ta sử dụng một đại lượng vô hướng để đánh giá bài toán đó là chiều dài của vùng xoáy dưới L_r/h . Hình 3.23 trình bày đại lượng L_r/h như là một hàm của hệ số Reynolds. Để kiểm chứng độ chính xác của phương pháp được đề xuất trong luận án này, các kết quả được so sánh với các kết quả thực nghiệm và các kết quả mô phỏng số đã được công bố. Từ kết quả so sánh, chúng ta thấy sự đồng thuận khá tốt của phương pháp đề xuất với các kết quả tham khảo [127-130].



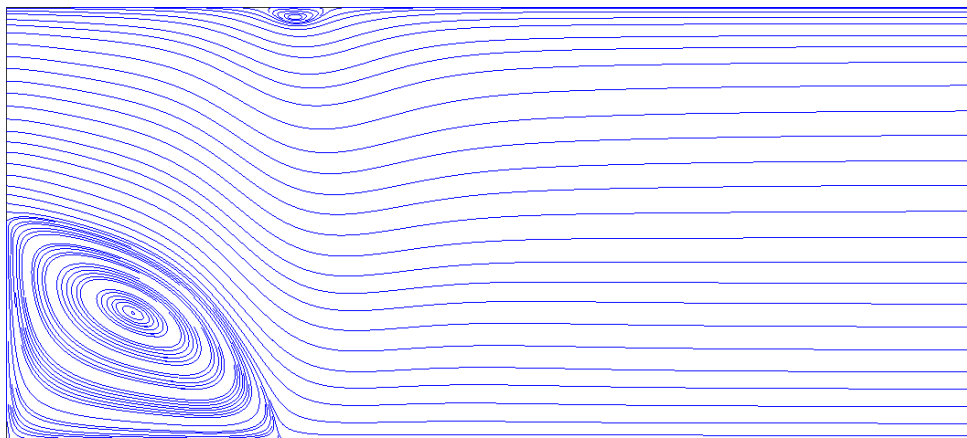
Hình 3.15: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 100$.



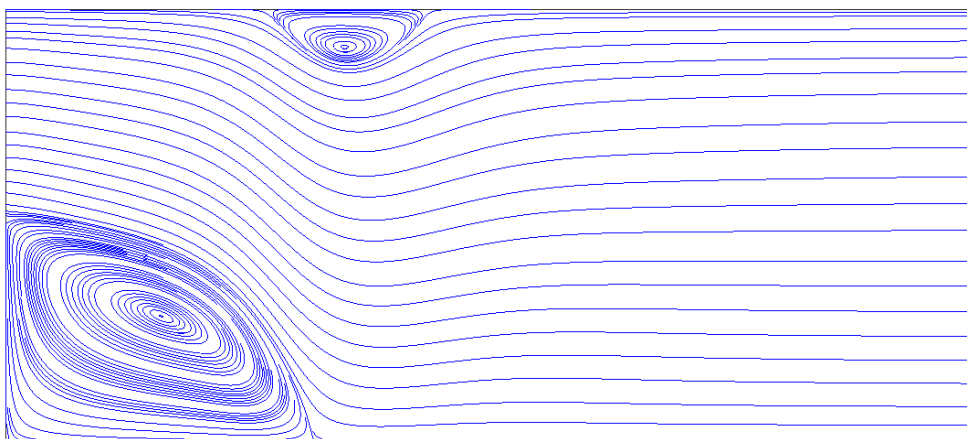
Hình 3.16: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 200$.



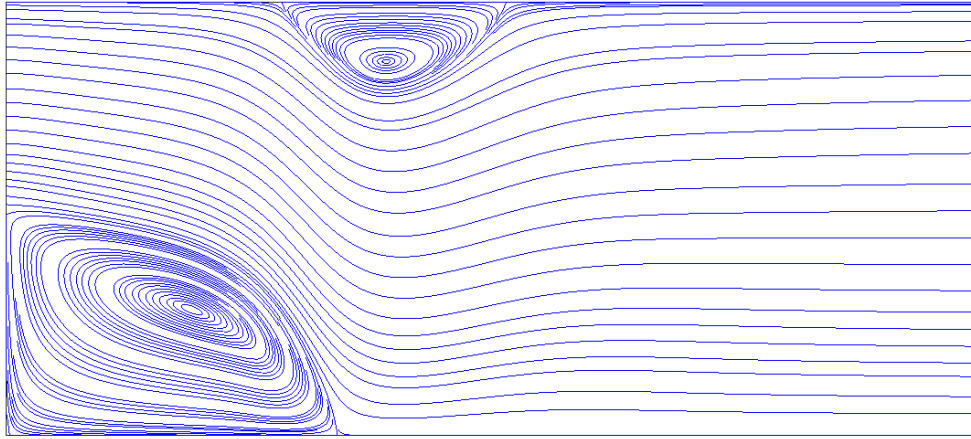
Hình 3.17: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 300$.



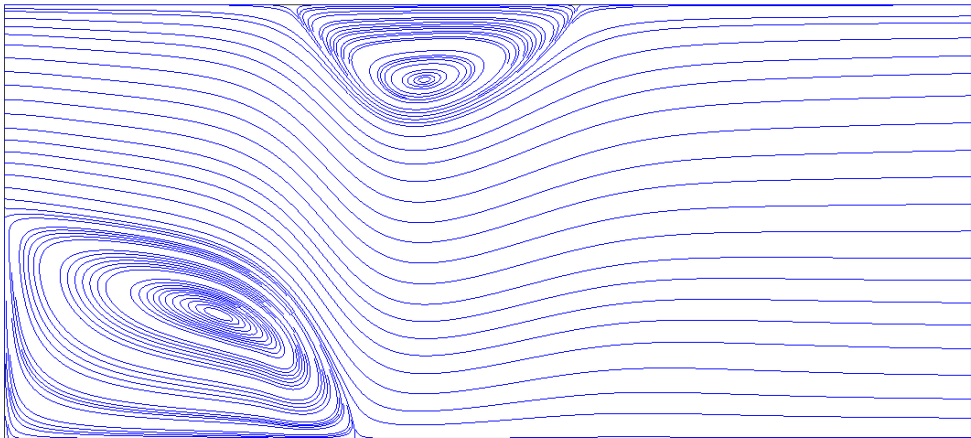
Hình 3.18: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 400$.



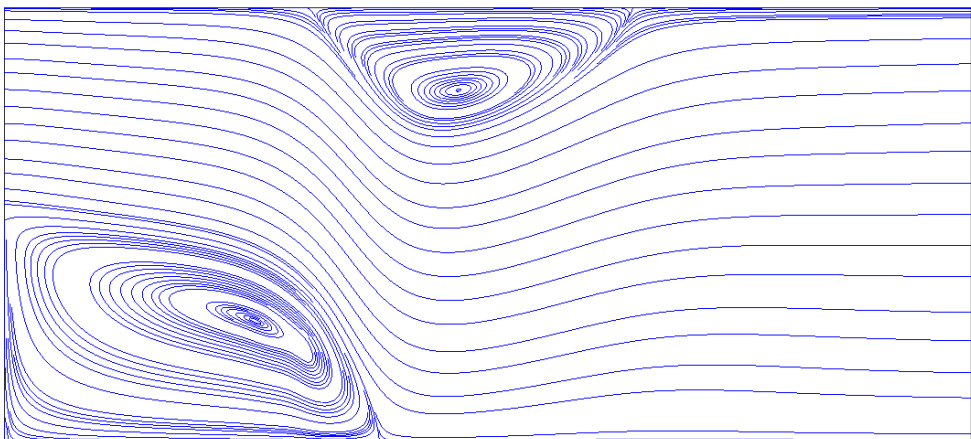
Hình 3.19: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 500$.



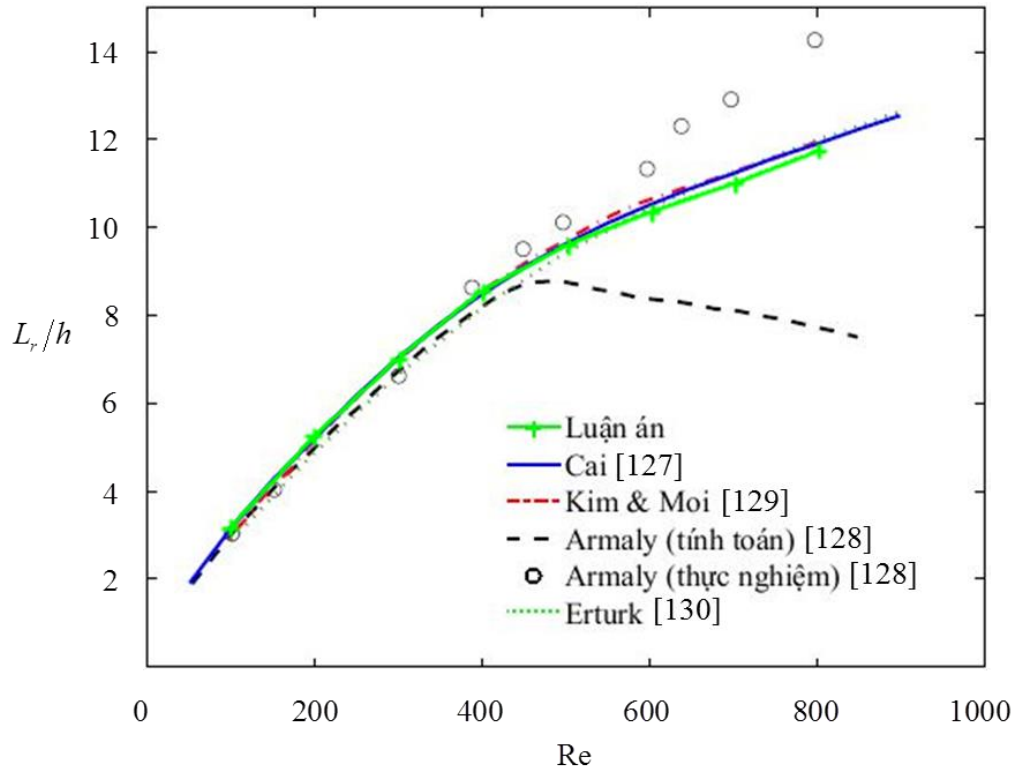
Hình 3.20: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 600$.



Hình 3.21: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 700$.

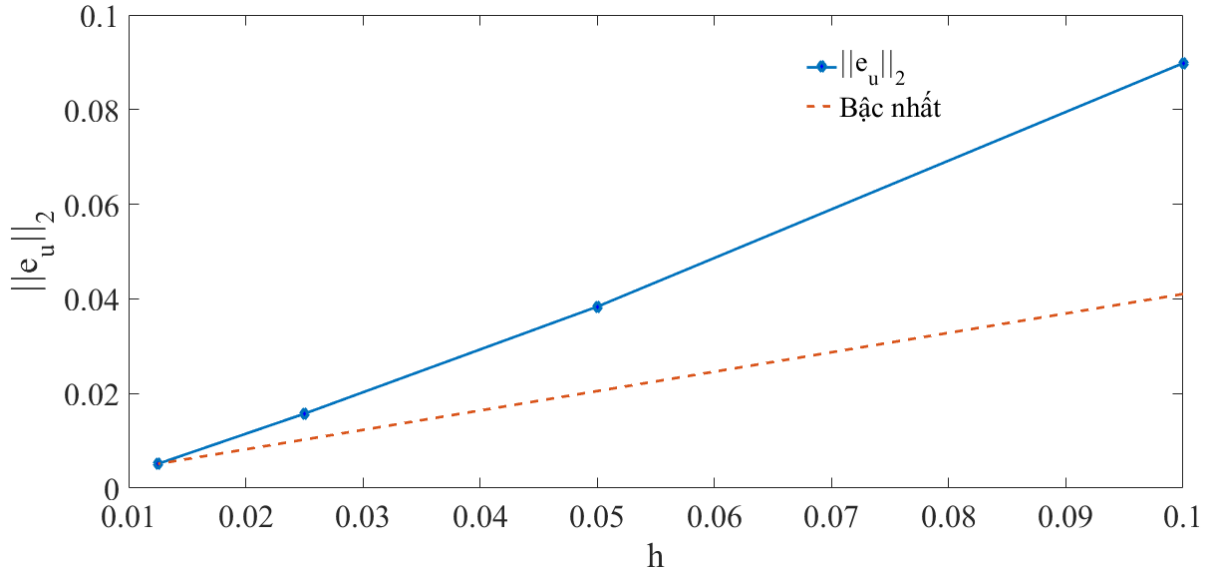


Hình 3.22: Đường dòng của bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 800$.



Hình 3.23: So sánh chiều dài vùng xoáy của bài toán Backward-facing step flow.

Để đánh giá ảnh hưởng của bước lưới đến độ chính xác của lời giải, chúng ta sẽ tiến hành khảo sát bài toán ở hệ số $Re=100$ với các bước lưới khác nhau $h = \{0.1000, 0.0500, 0.0250, 0.0125\}$. Vì bài toán không có lời giải chính xác nên lời giải ở bước lưới $h=0.0063$ được sử dụng như lời giải tham khảo để tính toán sai số. Bài toán được khảo sát đến thời điểm $t=0.5$ s với bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s để đảm bảo sự ổn định của bài toán ở các bước lưới nhỏ. Hình 3.24 trình bày các giá trị sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang $\|e_u\|_2$. Kết quả từ hình 3.24 cho thấy sai số có bậc hội tụ khoảng 1.38.



Hình 3.24: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán Backward-facing step flow ở hệ số $Re = 100$.

3.9. Kết luận

Trong chương này đã phát triển phương pháp PGD kết hợp với phương pháp chiếu và phương pháp sai phân hữu hạn để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt ở các điều kiện biên và miền vật lý khác nhau:

- Giải bài toán Lid-driven cavity ở các hệ số Reynolds khác nhau, đồng thời so sánh kết quả tính toán của phương pháp đề xuất với các kết quả đã công bố trước đây. Từ đó, cho thấy các kết quả về vận tốc và tọa độ tâm xoáy trung tâm có sự tương đồng rất tốt với các kết quả tham khảo.
- Giải bài toán Backward-facing step flow ở các hệ số Reynolds khác nhau. Từ các kết quả đạt được cho thấy sự đồng thuận rất tốt của phương pháp đề xuất về dạng xoáy và chiều dài vùng xoáy với các kết quả tham khảo.
- Các kết quả khảo sát về sai số ở các bước lưới khác nhau cũng được thực hiện, cho thấy sai số của phương pháp PGD cho các bài toán có bậc hội tụ cao hơn đường hội tụ bậc nhất (bậc hội tụ đạt 1.44 với bài toán Lid-driven cavity và 1.38 với bài toán Backward-facing step flow)
- Các kết quả so sánh về thời gian tính toán của phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn cũng được trình bày, cho thấy thời gian

tính toán của phương pháp PGD bé hơn thời gian tính toán của phương pháp sai phân hữu hạn ở cùng một bước lưới. Với bài toán Lid-driven cavity tỉ lệ $t_{FDM} / t_{PGD} = 3.1$ ở 640×640 điểm lưới.

Các công bố khoa học đã thực hiện ở chương này:

1. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huỳnh, “Phương pháp Proper Generalized Decomposition cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua một miền vuông,” *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, 2015*, 45-52, ISBN: 978-604-84-1272-2.

2. Huynh, P.D., **Cuong, L.Q**, “The numerical simulation of heat transfer and fluid flow problems by using the proper generalized decomposition method,” *Proceedings of the 2012 International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD2012), HoChiMinh City, Vietnam, 35-39, 2012*.

Chương 4

PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG KẾT HỢP VỚI PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN QUA VẬT CẢN BIÊN CỨNG

4.1. Giới thiệu

Các bài toán FSI là lớp các bài toán thường gặp trong thực tế. Đã có nhiều phương pháp số (phần tử hữu hạn, thể tích hữu hạn, sai phân hữu hạn, ...) được áp dụng thành công để giải quyết các bài toán này. Tuy nhiên do sự xuất hiện của vật cản trong lưu chất nên đối với các phương pháp kể trên thì việc chia lưới tính toán thực sự không dễ dàng, đặc biệt với các bài toán có biên biến dạng hoặc biên di chuyển. Trong bối cảnh đó, phương pháp IB đã chứng minh được tính hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán FSI. Phương pháp IB xử lý các bài toán loại này bằng cách thay thế sự hiện diện của vật cản trong lưu chất bằng một lực cưỡng bức tác động lên lưu chất, do đó miền tính toán sau đó được xem như một miền lưu chất đồng nhất. Vì vậy, sự phức tạp trong việc chia lưới sẽ được giảm bớt khi áp dụng phương pháp IB cho các bài toán FSI.

Tuy nhiên, đối với các bài toán FSI trong không gian hai chiều hay ba chiều đòi hỏi phải chia lưới tính toán trên toàn miền với các phương pháp số thông thường. Do đó, khi thực tính toán các bài toán này đòi hỏi phải có dung lượng bộ nhớ chương trình đủ lớn và sẽ hao tổn rất nhiều thời gian tính toán. Gần đây, phương pháp PGD đã được đề xuất để giải quyết các bài toán đa chiều một cách hiệu quả. Phương pháp PGD giải quyết các bài toán đa chiều dựa trên nguyên lý đưa các phương trình vi phân đa chiều về việc giải các chuỗi các bài toán một chiều. Vì vậy, phương pháp PGD sẽ giúp tiết kiệm dung lượng bộ nhớ chương trình, đồng thời làm giảm thời gian tính toán một cách đáng kể.

Trong chương này, đề xuất việc kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD trong việc giải quyết các bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén qua các vật thể biên cứng.

4.2. Hệ Phương trình chuyển động

Xét bài toán dòng chảy nhớt không nén trong miền chữ nhật hai chiều $\Omega_f = [0, l_x] \times [0, l_y]$ chứa một biên nhúng không khối lượng ở dạng một đường cong khép kín Γ như trình bày ở hình 4.1. Cấu trúc của biên nhúng được cho ở dạng tham số: $\mathbf{X}(s, t)$, $0 \leq s \leq L_b$, $\mathbf{X}(0, t) = \mathbf{X}(L_b, t)$, ở đây L_b là chiều dài biên Γ , s là chiều dài cung và t là thời gian. Ảnh hưởng của biên nhúng lên lưu chất được trình bày bởi thành phần lực cưỡng bức tác dụng lên lưu chất. Vì vậy, sự chuyển động của dòng lưu chất được mô tả bằng hệ phương trình Navier-Sokes như sau

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

Với $\mathbf{x} = (x, y)$ là tọa độ trên lưới Euler và $\mathbf{X} = (X, Y)$ là điểm biên trên lưới Lagrange, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ là vận tốc của lưu chất và $p(\mathbf{x}, t)$ là áp suất lưu chất. Các hệ số ρ và μ lần lượt là khối lượng riêng và độ nhớt của lưu chất. Thành phần lực khối tác dụng lên lưu chất là $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_x(\mathbf{x}, t), f_y(\mathbf{x}, t))$ có dạng công thức toán học là

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds \quad (4.3)$$

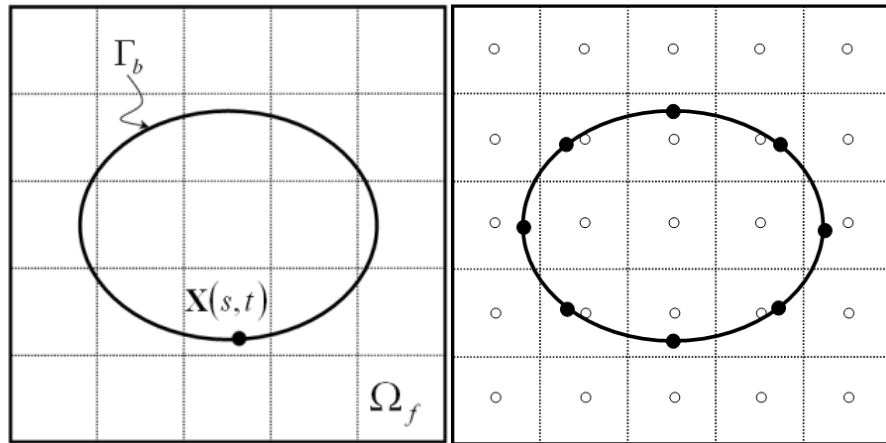
ở đây $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)$ là hàm rời rạc Delta và $\mathbf{F}(s, t) = (F_x(s, t), F_y(s, t))$ là lực khối tại các điểm biên được xác định như sau

$$\mathbf{F}(s, t) = \kappa (\mathbf{X}^e(s) - \mathbf{X}(s, t)) \quad (4.4)$$

ở đây κ là một hằng số dương và $\kappa \gg 1$, $\mathbf{X}^e(s)$ là vị trí cân bằng cố định, và $\mathbf{X}(s,t)$ là các điểm biên nhúng ở thời điểm t . Sự chuyển động của biên nhúng được tính theo công thức sau

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial t} = \mathbf{U}(s,t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s,t), t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s,t)) d\mathbf{x} \quad (4.5)$$

Phương trình (4.3) và (4.5) thể hiện sự tương tác giữa biên nhúng và lưu chất. Trong phương trình (4.3) là thành phần lực khối tác dụng đến lưu chất gây ra bởi biên nhúng, trong khi đó ở phương trình (4.5) biên nhúng được di chuyển cùng với lưu chất.



Hình 4.1: Hệ lưu chất-kết cấu đơn giản và lưới rời rạc Euler (đánh dấu sáng) và lưới Lagrange (đánh dấu tối).

4.3. Phương pháp số

Xét miền lưu chất $\Omega_f = [0, l_x] \times [0, l_y]$ và các biến lưu chất được định nghĩa trên $N_x \times N_y$ ô lưới Euler cố định được ký hiệu như sau: $\mathbf{x} = (x_i, y_j) = (ih, jh)$ với $i = 0, 1, \dots, N_x - 1$ và $j = 0, 1, \dots, N_y - 1$, ở đây $h = h_x = h_y = l_x / N_x = l_y / N_y$ là kích thước lưới Euler. Mặt khác, chúng ta sử dụng M điểm lưới Lagrange $\mathbf{X}(X_k, Y_k)$ với $k = 0, 1, \dots, M - 1$ để rời rạc biên nhúng với độ rộng lưới ban đầu là $\Delta s = L_b / M$,

ở đây L_b là chiều dài của biên nhúng. Như trong phương trình (4.1) – (4.5), chúng ta sẽ sử dụng các biến viết thường dùng để trình bày các giá trị định nghĩa trên lưới nền lưu chất và các biến viết hoa để trình bày các giá trị trên những điểm biên nhúng. Một cặp chỉ số trên trình bày chỉ số bước thời gian. Vì vậy, $\mathbf{u}^n(\mathbf{x})$ và $\mathbf{X}^n(s)$ là xấp xỉ của $\mathbf{u}(\mathbf{x}, n\Delta t)$ và $\mathbf{X}(s, n\Delta t)$.

4.3.1. Phương pháp chiếu

Khó khăn chủ yếu trong việc giải hệ phương trình Navier-Stokes đó là sự kết hợp của vận tốc – áp suất, để giải quyết vấn đề này, một phương pháp chiếu được đề xuất bởi Chorin [124] đã được sử dụng. Phương pháp chiếu sử dụng ở đây tương tự như ở mục 3.3 của chương 3, tuy nhiên có sự khác biệt đó là sự xuất hiện của thành phần lực \mathbf{f} trong hệ phương trình Navier-Stokes. Xét phương hệ trình Navier-Stokes trong không gian hai chiều như sau

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.7)$$

Trong phương pháp chiếu, việc rời rạc hệ phương trình (4.6) và (4.7) được trình bày như sau

$$\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} - \rho(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \mu \Delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}^n \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (4.9)$$

với điều kiện biên

$$\mathbf{u}^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b^{n+1} \quad (4.10)$$

Hệ phương trình (4.8) – (4.10) được giải theo trình tự như sau:

Bước 1: tính trực tiếp vận tốc trung gian \mathbf{u}^* từ phương trình động lượng (4.8) bỏ qua thành phần gradient áp suất

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}^n + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}^n \quad (4.11)$$

ở đây \mathbf{u}^n là vận tốc ở bước thời gian thứ n . Ở bước thời gian tiếp theo, ta có

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (4.12)$$

Bước 2: Hiệu chỉnh áp suất

Từ phương trình (4.12) ta có

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (4.13)$$

Tiến hành lấy divergence ($\nabla \cdot$) cho cả hai vế của phương trình (4.13) ta được

$$\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \Delta p^{n+1} \quad (4.14)$$

do điều kiện $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$, nên phương trình (4.14) trở thành

$$-\frac{1}{\rho} \Delta p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (4.15)$$

hay:

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (4.16)$$

Đây là phương trình Poisson cho áp suất, giải phương trình này chúng ta sẽ tìm được áp suất ở bước thời gian $n+1$.

Bước 3: Cập nhật vận tốc ở bước thời gian $n+1$

Với áp suất vừa tìm được từ phương trình (4.16), thay vào phương trình (4.12) ta có vận tốc ở bước thời gian kế tiếp $n+1$ được tính như sau

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (4.17)$$

Tóm lại, để giải hệ phương trình Navier – Stokes ở bước thời gian thứ $(n+1)$ gồm các bước sau:

Cập nhật vận tốc trung gian \mathbf{u}^* từ phương trình (4.11).

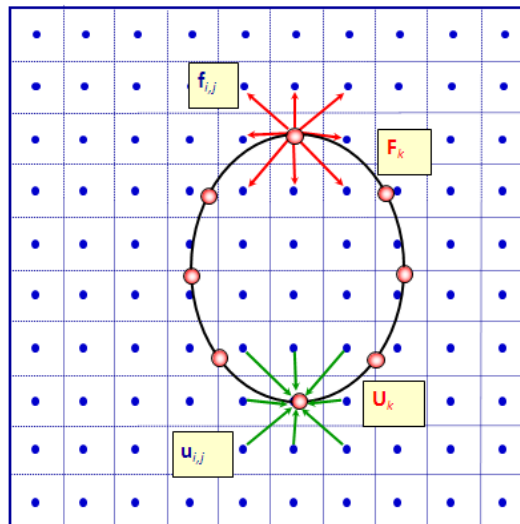
Giải phương trình Poisson cho áp suất (4.16) để tìm áp suất p^{n+1} .

Tính vận tốc \mathbf{u}^{n+1} sử dụng phương trình (4.17).

4.3.2. Xác định thành phần lực cưỡng bức \mathbf{f}

Để giải hệ phương trình Navier – Stokes, thành phần lực cưỡng bức \mathbf{f}^n phải được xác định trước khi giải các phương trình (4.11), (4.16) và (4.17) như trình bày ở phần trên.

Thành phần lực khối sẽ được tính toán tại các điểm trên biên nhúng và sau đó sẽ được phân bố đến các điểm lưới Đề các xung quanh trên toàn miền lưu chất bằng một biểu diễn rời rạc của hàm Dirac delta. Hình 4.2 minh họa quá trình nội suy vận tốc tại các điểm trên biên nhúng và quá trình phân bố lực khối trên biên nhúng đến các điểm lưới xung quanh trên toàn miền lưu chất.



Hình 4.2: Phân bố lực cưỡng bức từ một điểm trên biên nhúng đến các điểm lưới lân cận và nội suy vận tốc ở một điểm khác trên biên nhúng.

Để giải quyết bài toán biên cứng, Lai & Peskin [45] đã đề xuất phương pháp tính lực cưỡng bức tại các điểm trên biên nhúng như sau

$$\mathbf{F}_k^n = \kappa(\mathbf{X}_k^e - \mathbf{X}_k^n) \quad (4.18)$$

ở đây κ là một hằng số dương và $\kappa \gg 1$, \mathbf{X}_k^e là vị trí cân bằng cố định của điểm biên nhúng thứ k , và \mathbf{X}_k^n là các điểm biên nhúng thứ k ở thời điểm $t = n\Delta t$.

Phương trình (4.18) chỉ được áp dụng cho các bài toán dòng chảy qua vật thể biên cứng đứng yên. Để mở rộng công thức trên cho các bài toán dòng chảy qua vật thể di chuyển, một công thức đã được đề xuất như sau

$$\mathbf{F}_k^n = \kappa(\mathbf{X}_k^{move} - \mathbf{X}_k^n) \quad (4.19)$$

ở đây \mathbf{X}_k^{move} là vị trí của biên nhúng ở bước thời gian thứ n , \mathbf{X}_k^n là vị trí biên nhúng được nội suy từ vận tốc lưu chất xung quanh ở bước thời gian thứ n . Ta thấy, công thức (4.19) sẽ trở thành công thức (4.18) khi vật thể không di chuyển, khi đó $\mathbf{X}_k^{move} = \mathbf{X}_k^e$.

Sau khi xác định được lực cường bức tại các điểm biên nhúng ở bước thời gian thứ n , lực này sẽ được phân bố đến các điểm lân cận theo công thức sau

$$\mathbf{f}_{i,j}^n = \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{F}_k^n \delta_h(\mathbf{x}_{i,j}^n - \mathbf{X}_k^n) \Delta s \quad (4.20)$$

ở đây $\mathbf{x}_{i,j}$ và $\mathbf{f}_{i,j}$ là tọa độ điểm lưới (i, j) và lực khối tương ứng tại điểm đó.

$\delta_h(\mathbf{x})$ là một hàm rời rạc delta hai chiều được tính theo công thức sau

$$\delta_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) \varphi\left(\frac{y}{h}\right) \quad (4.21)$$

ở đây h là kích thước lưới, x và y là hai thành phần tọa độ Đề Các của \mathbf{x} và $\varphi(r)$ là hàm rời rạc delta một chiều và $\varphi(r)$ được chọn như trong [61] như sau

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2} \right), & 0 \leq |r| \leq 1 \\ \frac{1}{8} \left(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2} \right), & 1 \leq |r| \leq 2 \\ 0, & 2 \leq |r| \end{cases} \quad (4.22)$$

Vì lực khối đã tính ở các điểm trên biên nhúng và được mở rộng đến toàn bộ các điểm lưới lưu chất, hệ phương trình Navier – Stokes sẽ được giải để tìm vận tốc và áp suất tại các điểm lưới ở bước thời gian thứ $n+1$. Trường vận tốc sau đó được nội suy để tìm vận tốc tại các điểm trên biên nhúng như sau

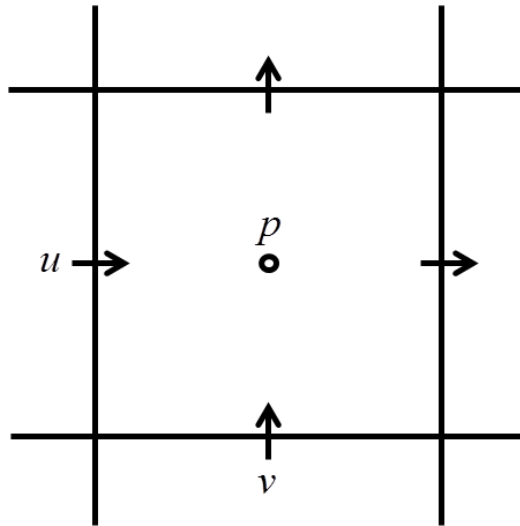
$$\mathbf{U}_k^{n+1}(\mathbf{X}_k) = \sum_{i,j} \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}_{i,j}) \delta_h(\mathbf{x}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{X}_k^{n+1}) h^2 \quad (4.23)$$

Từ vận tốc tại các trên biên nhúng, vị trí của các điểm biên được tính theo công thức sau

$$\mathbf{X}_k^{n+1} = \mathbf{X}_k^n + \Delta t \mathbf{U}_k^{n+1}(\mathbf{X}_k) \quad (4.24)$$

4.3.3. Rời rạc không gian

Khi giải hệ phương trình Navier – Stokes, rời rạc không gian được thực hiện trên lưới so le, với áp suất p nằm chính giữa của ô lưới, còn vận tốc theo phương ngang u được đặt ở vị trí trung điểm đường phân cách ô theo phương thẳng đứng, và vận tốc theo phương thẳng đứng v được đặt ở vị trí trung điểm đường phân cách ô theo phương ngang. Việc xấp xỉ các đạo hàm được thực hiện trên lưới so le tương tự như đã trình bày ở mục 3.4 của chương 3.



Hình 4.3: Lưới so le với áp suất và các thành phần vận tốc được xác định tại các vị trí khác nhau.

4.3.4. Giải phương trình Poisson

Chúng ta thấy rằng một trong những bước quan trọng và mất nhiều thời gian tính toán để giải hệ phương trình Navier – Stokes đó là bước giải phương trình Poisson cho áp suất ở mỗi bước thời gian. Ở bước này, phương pháp PGD được áp dụng để giải phương trình Poisson áp suất, chi tiết việc giải phương trình Poisson cho áp suất đã được trình bày ở mục 3.6 của chương 3.

4.4. Giải thuật tổng quát

Trong phần này sẽ trình bày các bước khác nhau để giải bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật thể biên cứng bằng phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD.

Giả sử các biến của bài toán ở bước thời gian thứ n đã biết. Để giải quyết bài toán ở bước thời gian thứ $n+1$, chúng ta tiến hành các bước sau:

Bước 1: tính lực cưỡng bức tại các điểm trên biên nhúng \mathbf{F}^n theo công thức (4.19).

Bước 2: phân bố lực cưỡng bức từ các điểm trên biên nhúng đến các điểm lưới lưu chất xung quanh theo công thức (4.20).

Bước 3: cập nhật vận tốc trung gian \mathbf{u}^* từ phương trình (4.11).

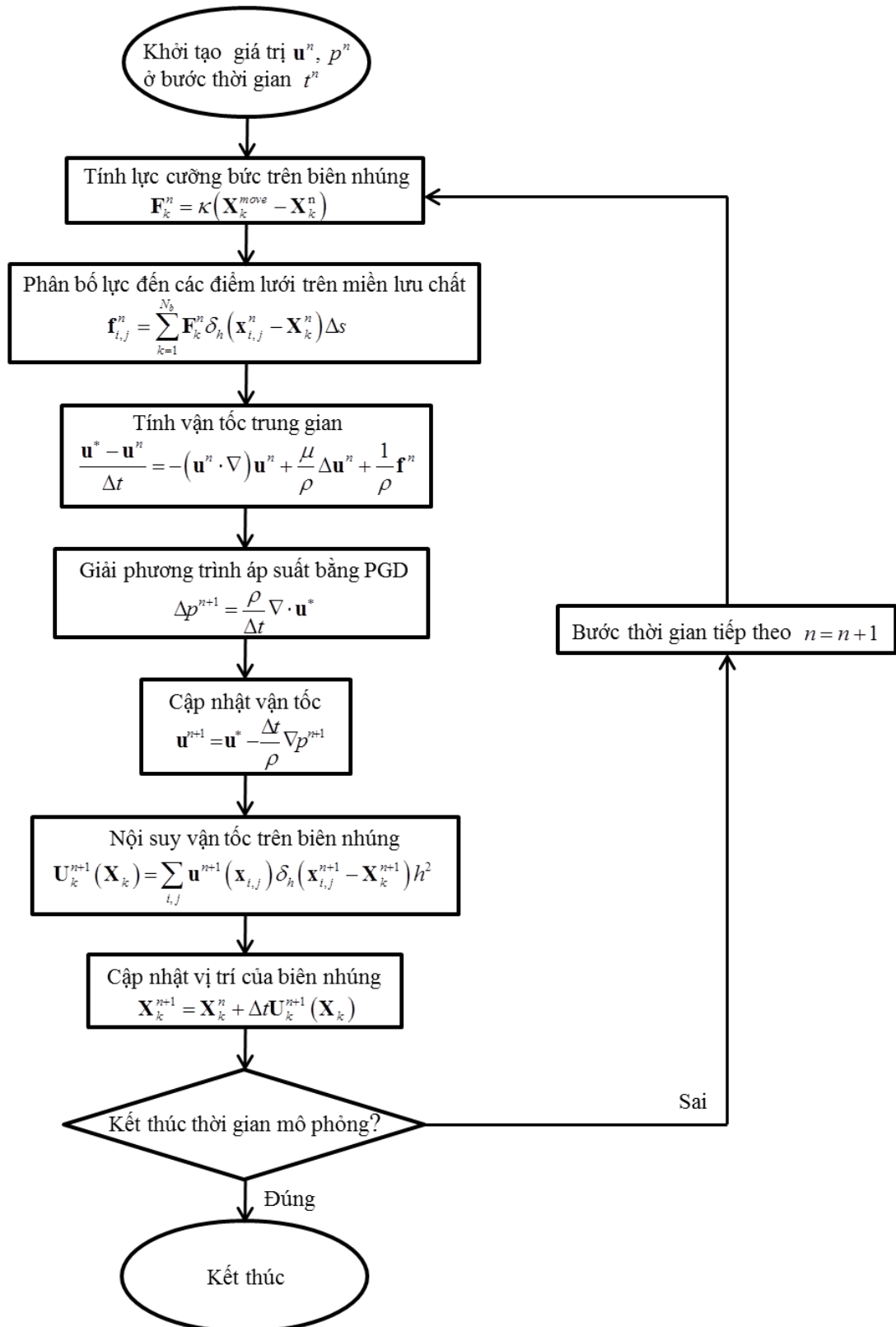
Bước 4: giải phương trình Poisson áp suất (4.16) bằng phương pháp PGD để tìm p^{n+1} .

Bước 5: sử dụng công thức (4.17) để tìm \mathbf{u}^{n+1} .

Bước 6: nội suy vận tốc tại các điểm trên biên nhúng \mathbf{U}^k từ phương trình (4.23).

Bước 7: từ vận tốc vừa tìm được ở bước 6, cập nhật vị trí của biên nhúng \mathbf{X}^n theo phương trình (4.24).

Hình 4.4 trình bày sơ đồ giải thuật của phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng. Trong sơ đồ giải thuật, các bước tính lực tại các điểm trên biên nhúng, phân bố lực đến các điểm lưới trên miền lưu chất, tính vận tốc và áp suất của lưu chất và cập nhật vận tốc của biên nhúng đã được trình bày. Chi tiết về giải thuật giải phương trình Poisson cho áp suất bằng phương pháp PGD đã được trình bày cụ thể ở phần 3.6.



Hình 4.4: Sơ đồ giải thuật kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng.

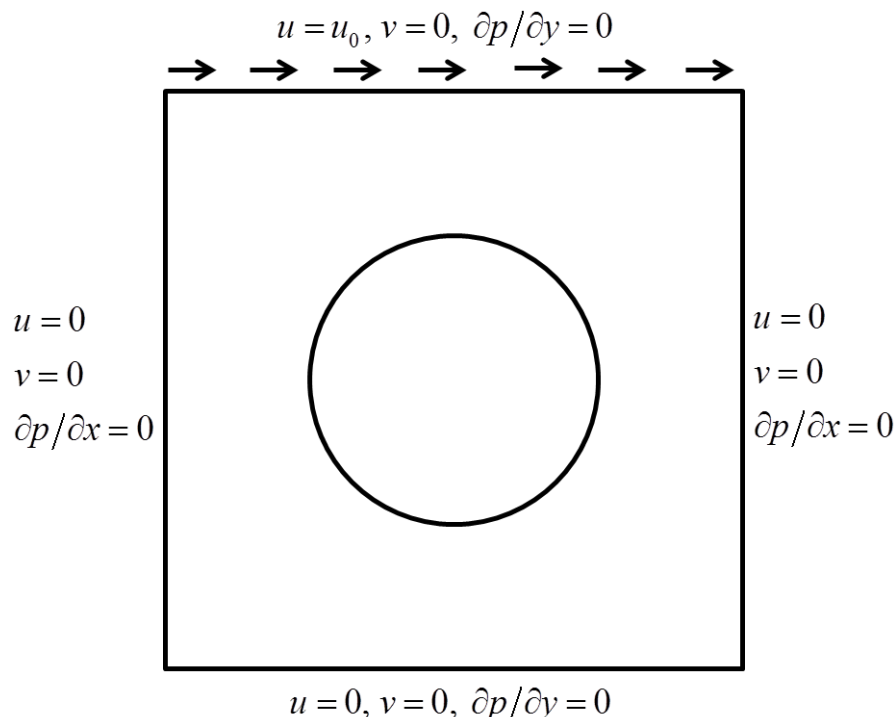
4.5. Kết quả mô phỏng số

4.5.1. Bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán

Trong phần này, phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD sẽ được áp dụng để mô phỏng bài toán dòng chảy trong một miền vuông với vật cản là một trụ tròn cố định ở giữa miền tính toán. Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán được cho như hình 4.5. Dòng chảy được dẫn bởi sự di chuyển của biên trên ở một hằng số vận tốc nhất định u_0 . Hệ số Reynolds của bài toán được định nghĩa như sau

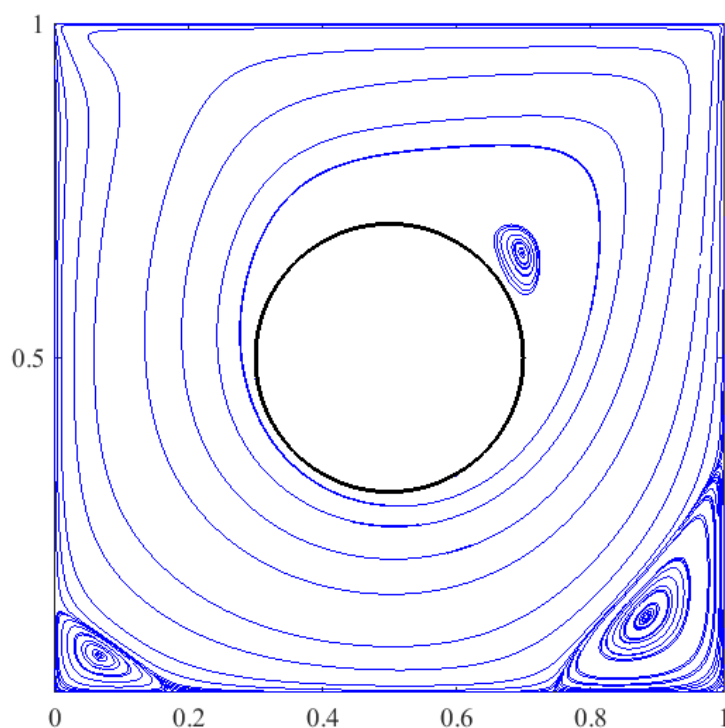
$$\text{Re} = \frac{\rho u_0 D}{\mu} \quad (4.25)$$

ở đây D là đường kính trụ tròn, u_0 là vận tốc dòng chảy theo phương ngang ở biên trên của miền tính toán, ρ và μ lần lượt là khối lượng riêng và độ nhớt của lưu chất.

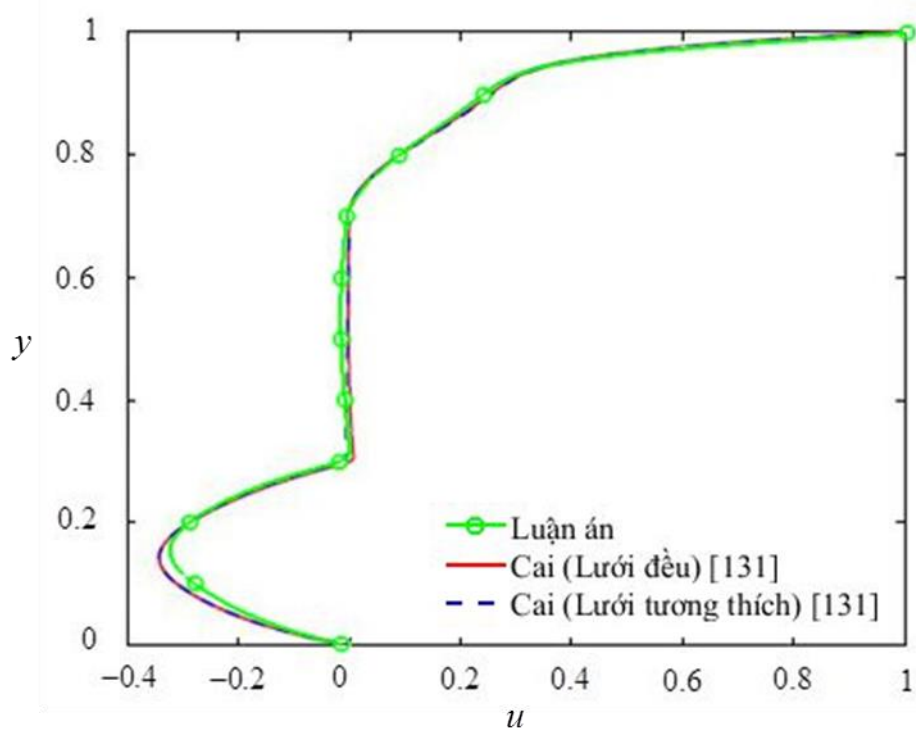


Hình 4.5: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán.

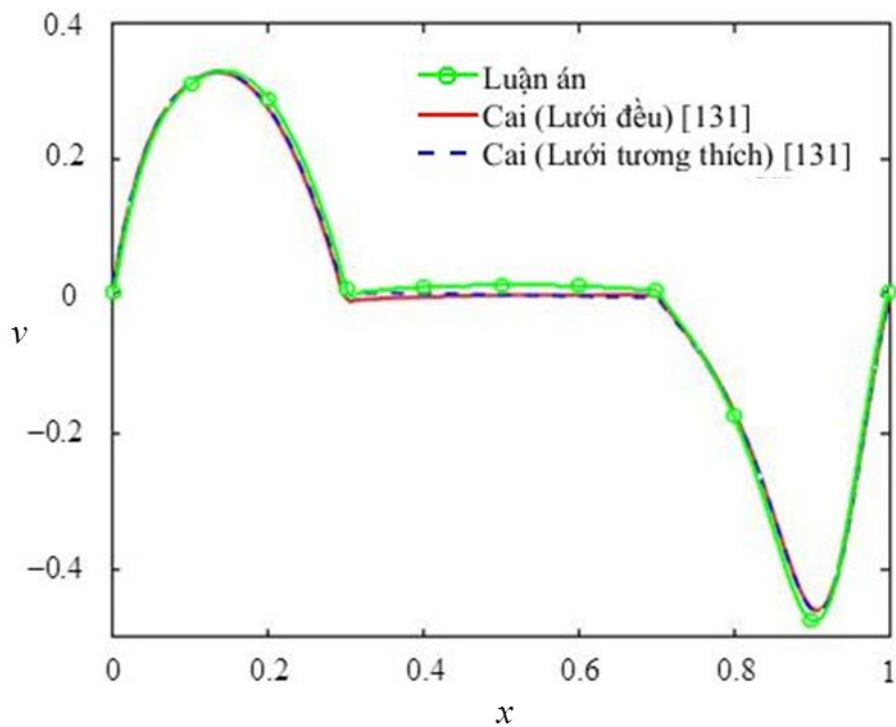
Chúng ta sẽ tiến hành mô phỏng bài toán với các thông số như sau: $L=1$, $u_0=1$, $Re=1000$ và $D=0.4L$. Lưới đều 301×301 điểm lưới được sử dụng để rời rạc miền lưu chất, bước thời gian $\Delta t=10^{-4}$ s được sử dụng để mô phỏng bài toán. Hình 4.6 trình bày đường dòng của bài toán ở hệ số $Re=1000$. Như chúng ta thấy, có ba xoáy nước xuất hiện. Một xoáy ở vị trí phía trên bên phải của trụ tròn và hai xoáy ở phía dưới gần góc phải và góc trái. Chúng ta có thể nhận thấy rằng xoáy phía trên được tạo ra do sự xuất hiện của trụ tròn cố định ở tâm của miền tính toán. Thành phần vận tốc theo phương ngang u ở vị trí $x=0.5$ và thành phần vận tốc theo phương đứng v ở vị trí $y=0.5$ được trình bày ở hình 4.7 và 4.8 tương ứng. Kết quả cho thấy sự đồng thuận khá tốt của phương pháp đề xuất với kết quả của Cai và cộng sự [131].



Hình 4.6: Đường dòng của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán.

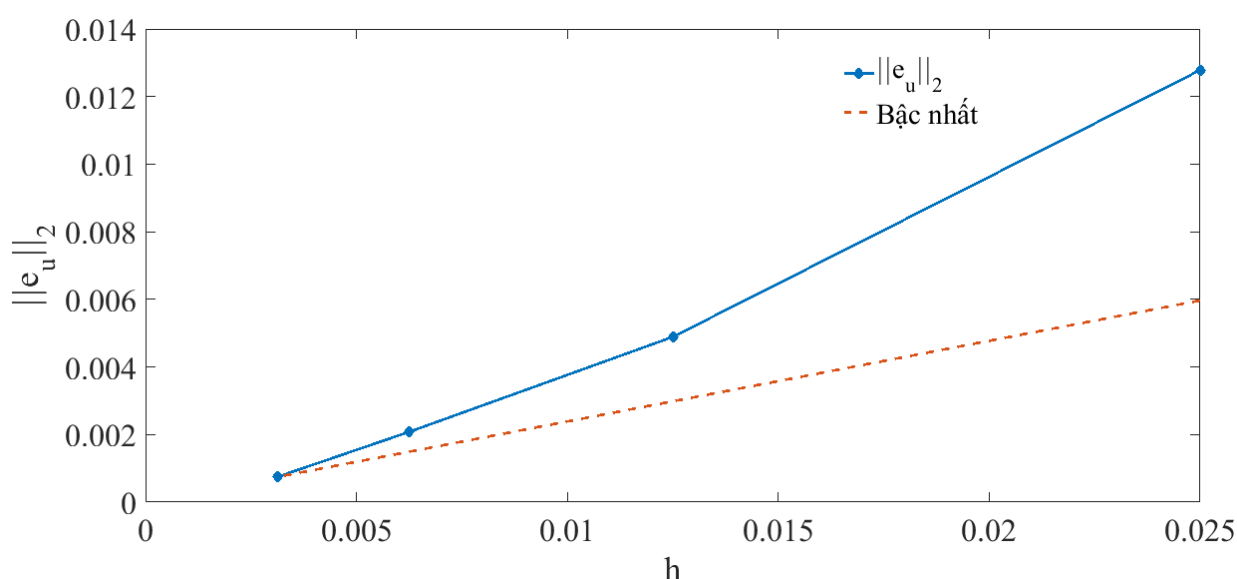


Hình 4.7: Thành phần vận tốc theo phương ngang u ở vị trí $x = 0.5$ của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán.



Hình 4.8: Thành phần vận tốc theo phương đứng v ở vị trí $y = 0.5$ của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán.

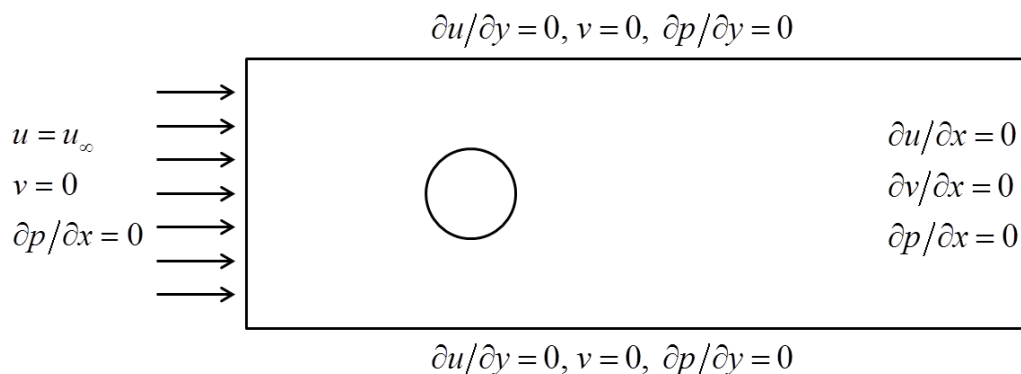
Để đánh giá ảnh hưởng của bước lưới đến độ chính xác của lời giải, chúng ta sẽ tiến hành khảo sát bài toán với các bước lưới khác nhau $h = \{0.02500, 0.01250, 0.00625, 0.003125\}$. Vì bài toán không có lời giải chính xác nên chúng ta sử dụng lời giải ở bước lưới $h = 0.0015625$ như lời giải tham khảo để tính toán sai số. Bài toán được khảo sát đến thời điểm $t = 0.2$ s với bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s để đảm bảo sự ổn định của bài toán ở các bước lưới nhỏ. Hình 4.9 trình bày các giá trị sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang $\|e_u\|_2$. Từ kết quả ở hình 4.9 cho thấy sai số có bậc hội tụ khoảng 1.32.



Hình 4.9: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán.

4.5.2. Bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định

Trong ví dụ kế tiếp là bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định. Đây được xem là bài toán kinh điển để kiểm chứng phương pháp được đề xuất vì đã có rất nhiều các kết quả thực nghiệm và kết quả mô phỏng số cho bài toán này. Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán được cho như hình 4.10. Chúng ta áp đặt điều kiện biên không trượt cho biên trên và biên dưới, điều kiện dòng chảy vào cho biên phải, dòng chảy ra cho biên trái.



Hình 4.10: Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định.

Sau đây, bài toán sẽ mô phỏng dòng chảy qua một trụ tròn có đường kính $D=0.1$ được cố định tại vị trí $(0.5,0.8)$ trong một miền chữ nhật $\Omega=[0,3.2]\times[0,1.6]$. Vận tốc dòng chảy vào $u_\infty=1$ và khối lượng riêng của lưu chất $\rho=1$. Mô phỏng lần lượt được thực hiện với các hệ số Reynolds khác nhau $Re=20, 40, 100$ và 200 trên lưới tính toán 512×256 và 42 điểm lưới Lagrangian đại diện cho trụ tròn. Bước thời gian $\Delta t=10^{-4}$ s được sử dụng để mô phỏng bài toán. Các đại lượng không thứ nguyên được định nghĩa như sau

$$\text{Hệ số Reynolds: } Re = \frac{\rho u_\infty D}{\mu} \quad (4.26)$$

ở đây u_∞ là vận tốc dòng chảy vào, D là đường kính trụ tròn, ρ và μ lần lượt là khối lượng riêng và độ nhớt của lưu chất

$$\text{Trục thời gian: } T = \frac{u_\infty t}{D} \quad (4.27)$$

Hệ số cản: Lực cản trên vật thể được nhúng trong dòng chảy xuất phát từ hai nguồn đó là ứng suất trượt và sự phân bố áp suất dọc theo vật thể, hệ số cản không thứ nguyên được định nghĩa như sau

$$C_d = \frac{2F_d}{\rho u_\infty^2 D} \quad (4.28)$$

$$\text{Với } F_d \text{ là lực cản được tính bởi } F_d = -\int_{\Omega} f_x d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} F_x ds, \quad (4.29)$$

Trong đó f_x và F_x thành phần lực khối theo phương x của \mathbf{f} và \mathbf{F} tương ứng.

Hệ số nâng: Khi xung quanh vật thể bắt đầu xuất hiện sự lan tỏa xoáy thì có một lực nâng được tạo bởi dòng lưu chất, hệ số nâng không thứ nguyên được định nghĩa như sau

$$C_l = \frac{2F_l}{\rho u_{\infty}^2 D} \quad (4.30)$$

$$\text{với } F_l \text{ là lực nâng được tính bởi } F_l = -\int_{\Omega} f_y d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} F_y ds, \quad (4.31)$$

trong đó f_y và F_y thành phần lực khối theo phương y của \mathbf{f} và \mathbf{F} tương ứng.

Hệ số Strouhal: Khi dòng chảy chuyển từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định và phía sau vật thể sẽ xuất hiện sự lan tỏa xoáy, đồng thời sinh ra tần số mà xoáy được lan tỏa từ vật thể, hệ số Strouhal được tính bởi công thức sau

$$St = \frac{f_q D}{u_{\infty}} \quad (4.32)$$

với f_q là tần số lan tỏa xoáy, thông số mới St được gọi là hệ số Strouhal. Trong tính toán thì chu kỳ T_p được đo lường một cách dễ dàng giữa hai làn xoáy, do đó

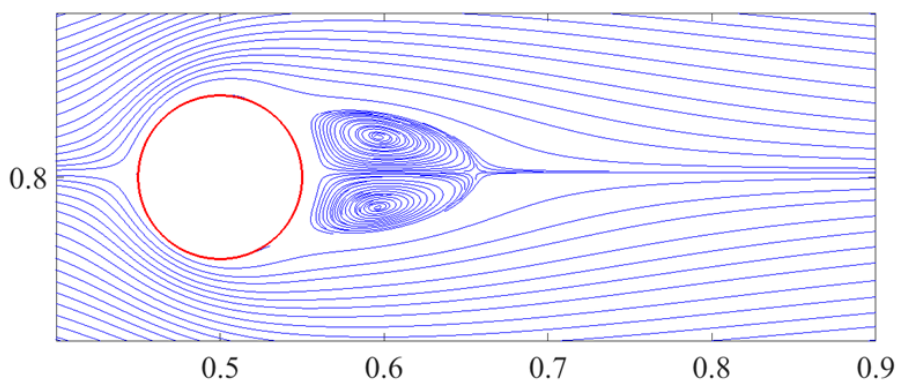
$$f_q = \frac{1}{T_p} \quad (4.33)$$

và hệ số Strouhal có thể tính bằng công thức

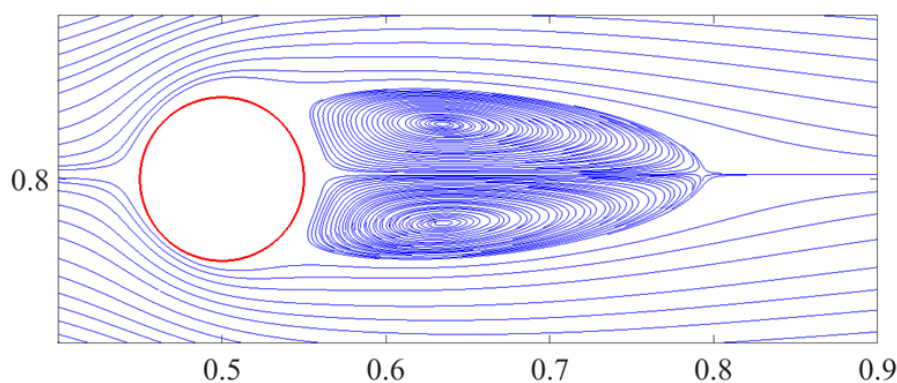
$$St = \frac{2}{T_p} \quad (4.34)$$

Ngoài ra ta cũng có thể đo lường được chiều dài của vùng xoáy sau trụ tròn bởi công thức L_w/D , ở đây L_w là chiều dài vùng xoáy đo theo phương x .

Hình 4.11 biểu diễn đường dòng ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$. Kết quả trên hình 4.11 cho ta thấy ở những hệ số Reynolds thấp dòng chảy dần dần đạt trạng thái ổn định và có dòng đuôi sau trụ tròn ở dạng đối xứng. Khi đạt trạng thái ổn định, hệ số cản và chiều dài vùng tuần hoàn được tính toán và so sánh với kết quả tham khảo khác như trong bảng 4.1.



(a) $Re = 20$

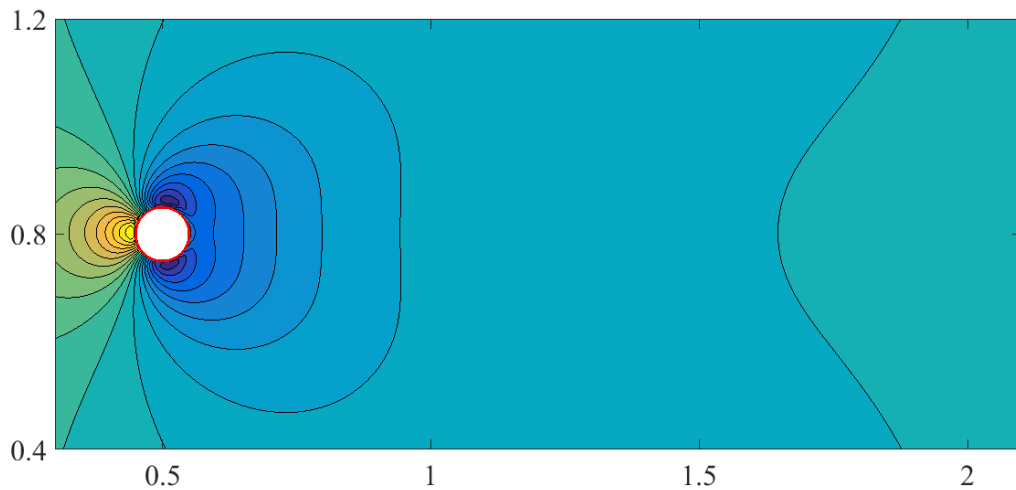


(a) $Re = 40$

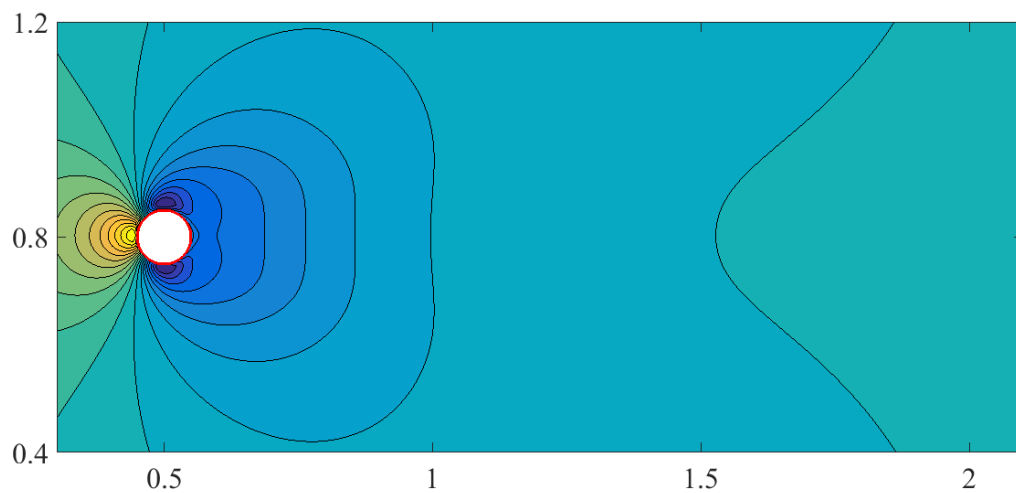
Hình 4.11: Đường dòng của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$.

Nhìn chung, hệ số cản đạt được có sự tương đồng khá tốt so với các kết quả thực nghiệm đã tiến hành và phương pháp số khác. Về chiều dài vùng tuần hoàn cũng đạt kết quả rất tốt so với kết quả trong [135,137] nhưng vẫn có phần lớn hơn khoảng 11-14% so với các kết quả trong [84,134,136].

Sự phân bố áp suất và xoáy xung quanh trụ tròn ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$ được trình bày ở hình 4.12 và hình 4.13, chúng ta thấy sự phân bố áp suất và xoáy có sự tương đồng rất tốt với các kết quả ở các tài liệu tham khảo.

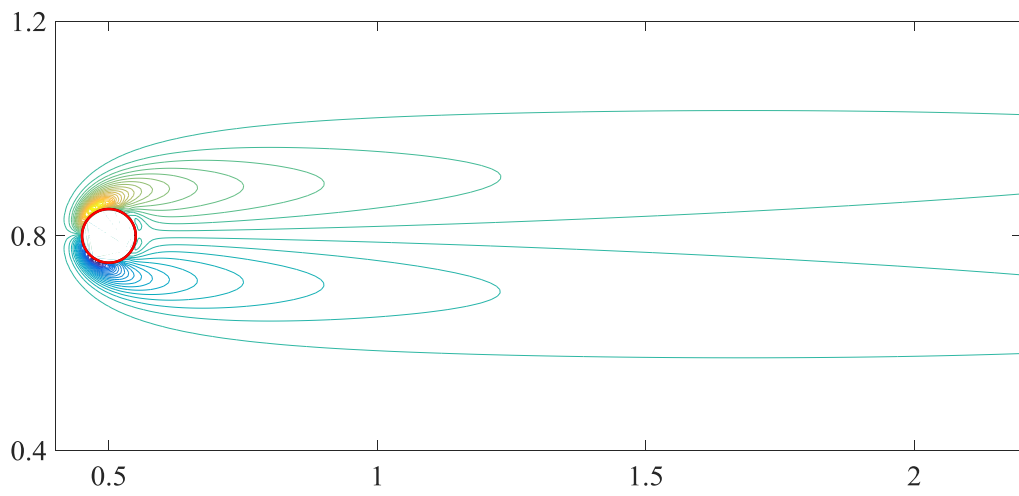


(a) $Re = 20$

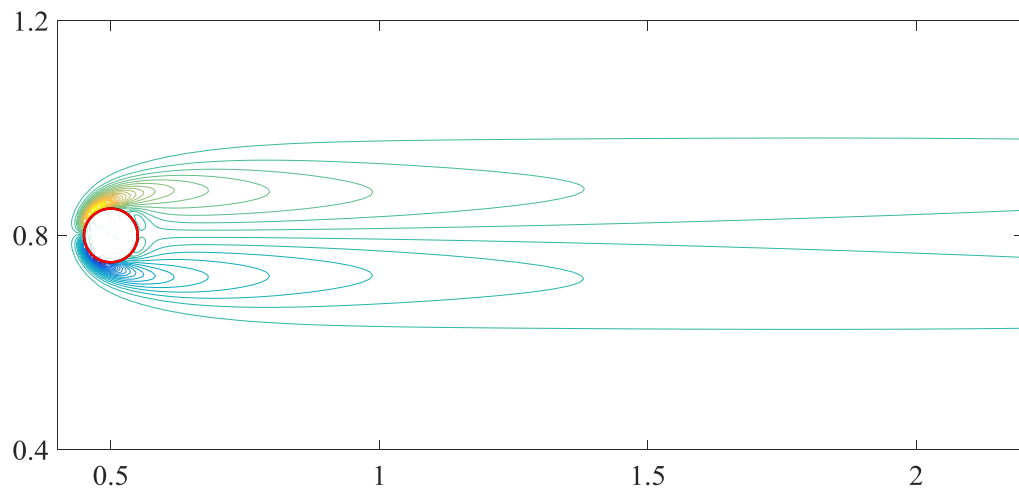


(b) $Re = 40$

Hình 4.12: Phân bố áp suất cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 20$ $Re = 40$.



(a) $Re = 20$



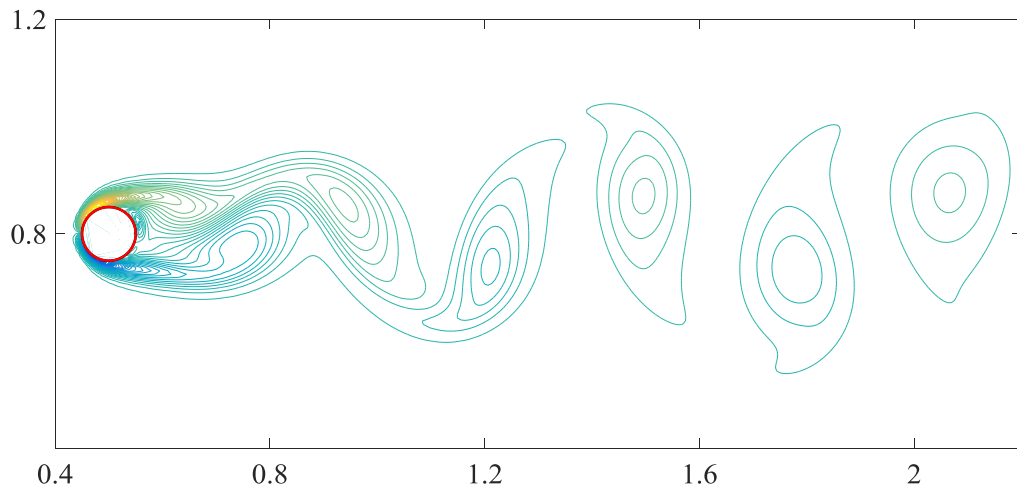
(a) $Re = 40$

Hình 4.13: Đường bao xoáy cho bài toán dòng chảy qua trụ một tròn ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$.

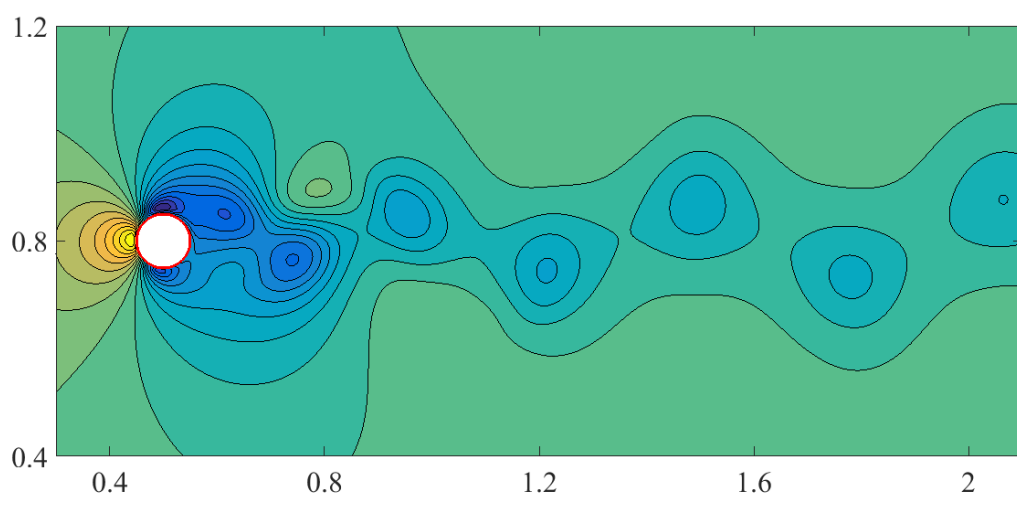
Bảng 4.1: Chiều dài vùng xoáy và hệ số cản ở hệ số $Re = 20$ và $Re = 40$.

	Re = 20		Re = 40	
	L_w/D	C_d	L_w/D	C_d
Tritton [132]	-	2.22	-	1.48
Coutanceau và cộng sự [133]	0.73	-	1.89	-
Calhoun và cộng sự [134]	0.91	2.19	2.18	1.62
Lima và cộng sự [135]	1.04	2.04	2.55	1.54
Rusell và cộng sự [136]	0.94	2.13	2.29	1.60
Le và cộng sự [84]	0.93	2.05	2.22	1.56
Le và cộng sự [137]	1.05	2.07	2.59	1.58
Kang & Hassan [138]	0.91	2.09	2.25	1.57
Luận án	1.05	2.27	2.42	1.69

Đường dòng và áp suất ở hệ số $Re = 100$ và $Re = 200$ lần lượt được biểu diễn ở hình 4.14 và hình 4.15. Chúng ta thấy rằng, ở các hệ số Reynolds lớn sẽ xuất hiện sự bất đối xứng của đuôi sóng phía sau ống trụ. Hình 4.16 và hình 4.17 lần lượt trình bày hệ số nâng và hệ số cản theo thời gian, tương ứng với hệ số Reynolds $Re = 100$ và $Re = 200$. Các giá trị của hệ số nâng, hệ số cản và số St được trình bày ở bảng 4.2 và được so sánh với các giá trị mô phỏng số khác. Từ kết quả ở bảng so sánh, chúng ta thấy rằng kết quả của phương pháp đề xuất có sự tương đồng rất tốt với các kết quả công bố trước đây, ngoại trừ hệ số cản C_d ở trường hợp $Re = 100$. Tuy nhiên, giá trị C_d cũng rất gần với giá trị được công bố bởi Lai và các cộng sự [45] (nhỏ hơn 1.2%). Từ bảng, cũng thấy rằng số St được tính toán trong luận án có sự tương đồng tốt với các kết quả của Le cùng cộng sự [84,137] và kết quả của Kang & Hassan [138].

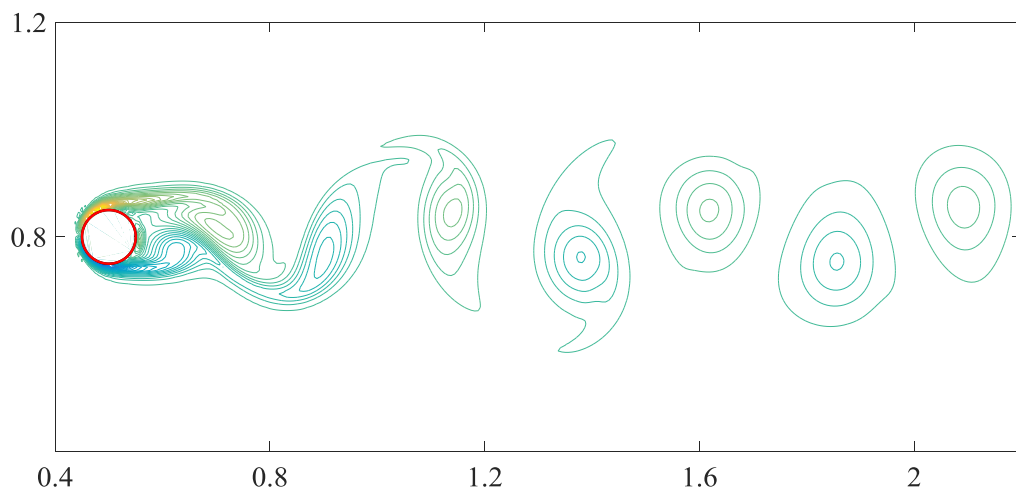


(a) Đường bao xoáy

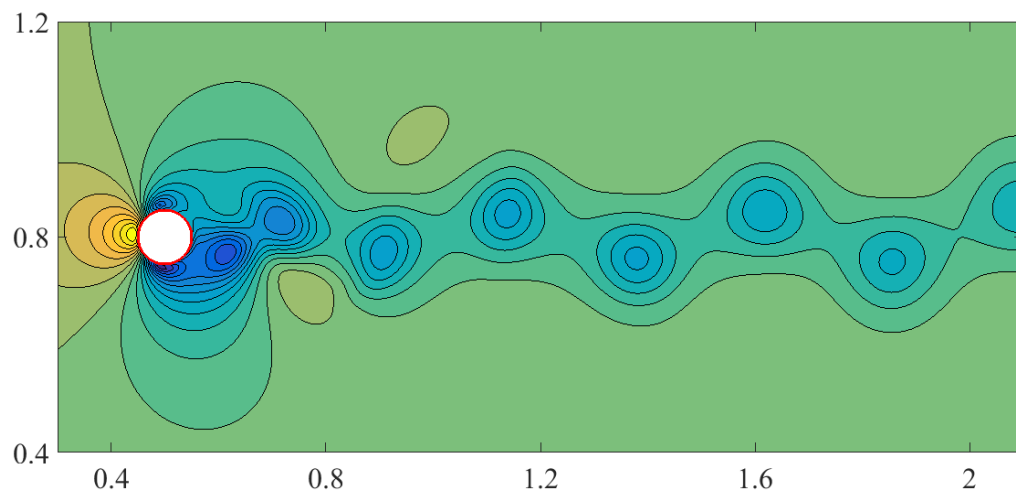


(b) Áp suất

Hình 4.14: Đường bao xoáy và phân bố áp suất cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số Reynolds $Re = 100$.

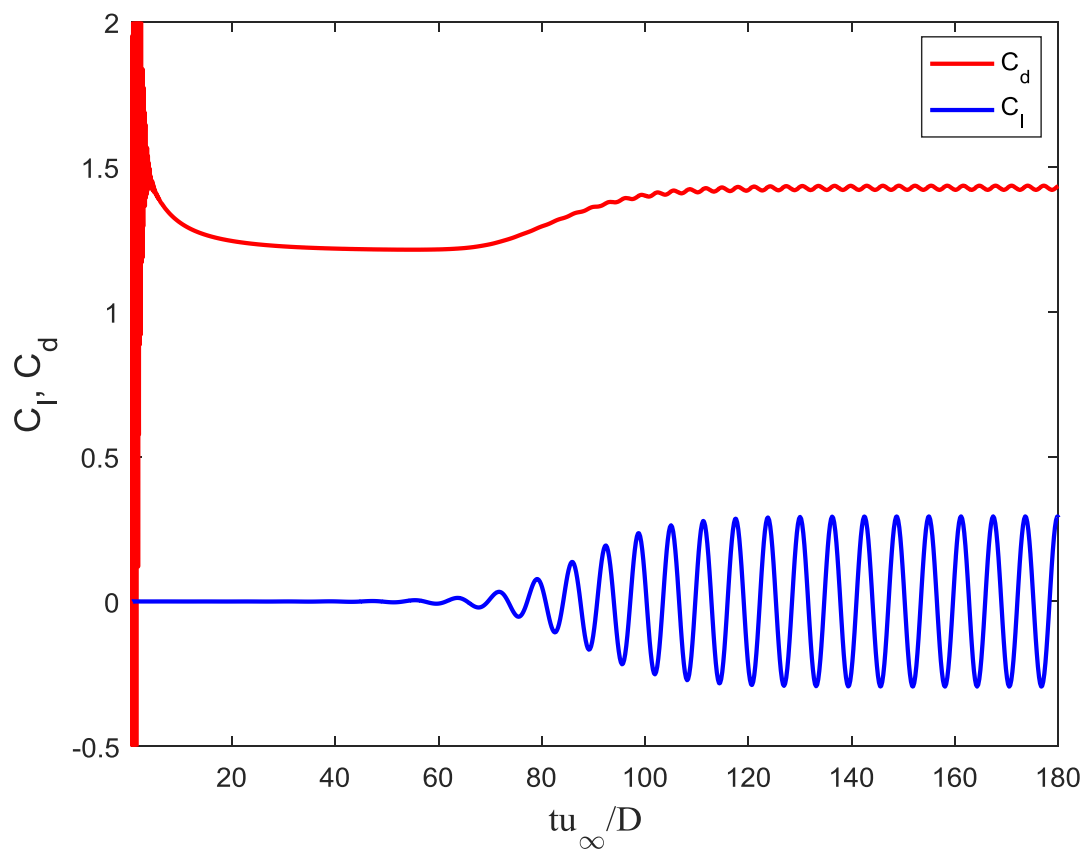


(a) Đường bao xoáy

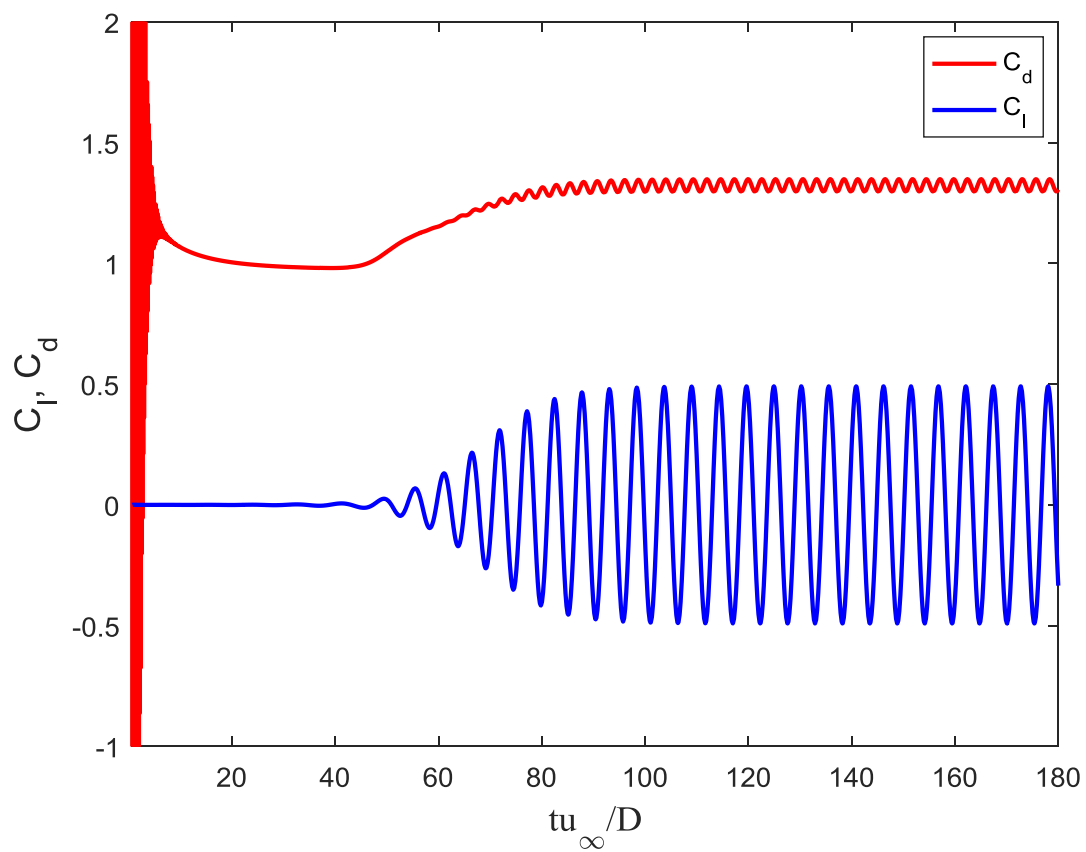


(b) Áp suất

Hình 4.15: Đường bao xoáy và phân bố áp suất cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số Reynolds $Re = 200$.



Hình 4.16: Hệ số nâng C_l và hệ số cản C_d theo thời gian cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 100$.

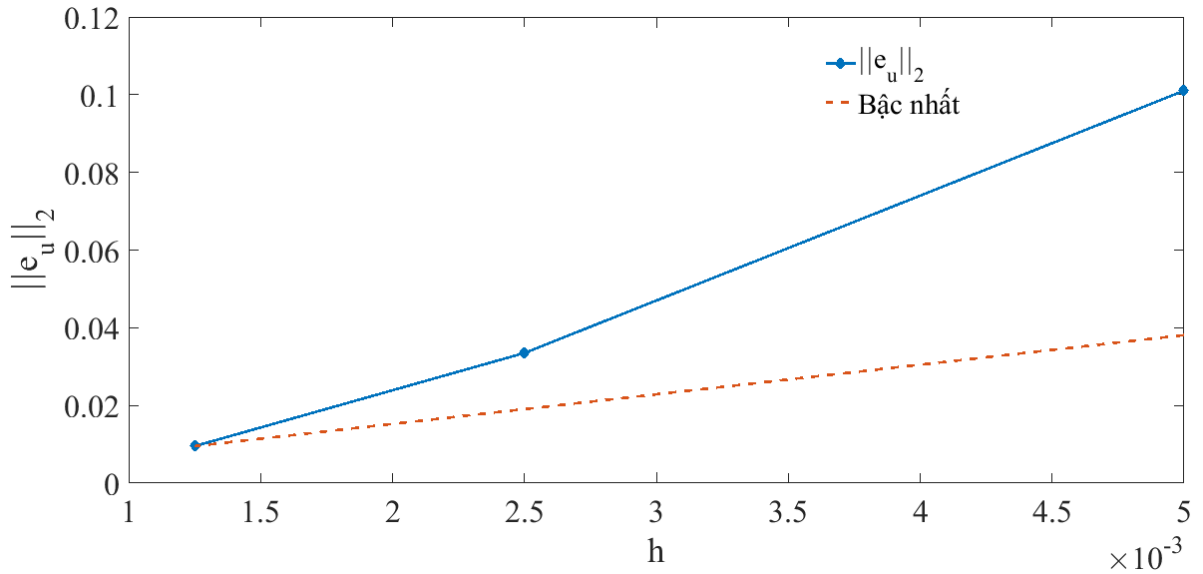


Hình 4.17: Hệ số nâng C_l và hệ số cản C_d theo thời gian cho bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 200$.

Bảng 4.2: Hệ số cản C_D , hệ số nâng C_L và số St ở hệ số $Re = 100$ và $Re = 200$.

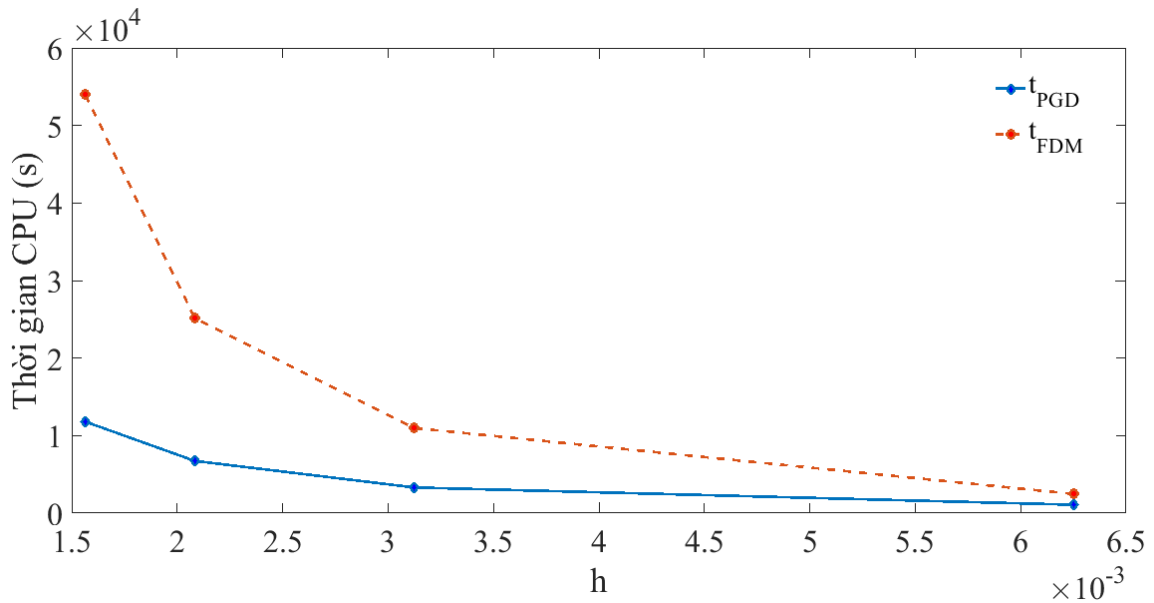
	Tác giả	C_d	C_l	St
$Re = 100$	Lai và cộng sự [45]	1.447	± 0.330	-
	Calhoun và cộng sự [134]	1.33 ± 0.014	± 0.298	0.175
	Rusell và cộng sự [136]	1.38 ± 0.007	± 0.300	0.169
	Le và cộng sự [84]	1.37 ± 0.009	± 0.323	0.160
	Le và cộng sự [137]	1.39 ± 0.009	± 0.346	0.160
	Kang & Hassan [138]	1.399	± 0.343	0.162
	Luận án	1.43 ± 0.007	± 0.294	0.161
$Re = 200$	Calhoun và cộng sự [134]	1.17 ± 0.058	± 0.67	0.202
	Rusell và cộng sự [136]	1.29 ± 0.022	± 0.50	0.195
	Le và cộng sự [84]	1.34 ± 0.030	± 0.43	0.187
	Le và cộng sự [137]	1.38 ± 0.040	± 0.67	0.192
	Luận án	1.32 ± 0.025	± 0.491	0.189

Để đánh giá ảnh hưởng của bước lưới đến độ chính xác của lời giải, chúng ta sẽ tiến hành khảo sát bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 100$ với các bước lưới khác nhau $h = \{0.0050, 0.00250, 0.00125\}$. Vì bài toán không có lời giải chính xác nên lời giải ở bước lưới $h = 0.000625$ được sử dụng như lời giải tham khảo để tính toán sai số. Bài toán được khảo sát đến thời điểm $t = 0.2$ s với bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s để đảm bảo sự ổn định của bài toán ở các bước lưới nhỏ. Hình 4.18 trình bày các giá trị sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang $\|e_u\|_2$. Dựa vào kết quả ở hình 4.18 cho thấy sai số có bậc hội tụ khoảng 1.36.



Hình 4.18: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở hệ số $Re = 100$.

Để đánh giá tốc độ tính toán của phương pháp PGD so với phương pháp sai phân hữu hạn, bài toán dòng chảy qua trụ tròn cố định ở hệ số Reynolds $Re = 100$ sẽ được khảo sát. Bài toán được thực hiện đến thời điểm $t = 0.2$ s với bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s. Hình 4.19 trình bày thời gian tính toán ở các bước lưới khác nhau, trong đó t_{PGD} và t_{FDM} lần lượt là thời gian tính toán của phương pháp PGD và phương pháp sai phân hữu hạn. Từ kết quả ở hình 4.19 cho thấy thời gian tính toán của phương PGD nhanh gấp 2.2 lần so với thời gian tính toán của phương pháp sai phân hữu hạn ở bước lưới $h = 0.0063$ (512×256 điểm lưới). Tỷ lệ $t_{FDM}/t_{PGD} = 3.3$ ở bước lưới $h = 0.0031$ (1024×512 điểm lưới) và $t_{FDM}/t_{PGD} = 4.6$ ở $h = 0.0016$ (2048×1024 điểm lưới).



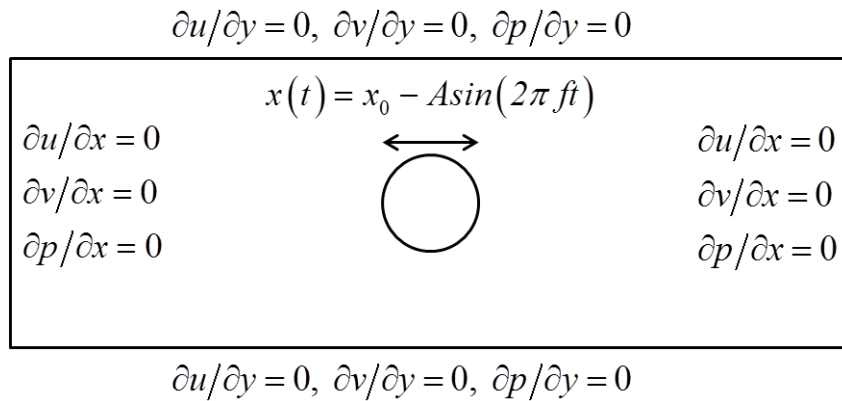
Hình 4.19: So sánh thời gian tính toán của phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán dòng chảy qua trụ tròn cố định ở hệ số $Re = 100$.

4.5.3. Bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh

Trong phần này, chúng ta xét dòng chảy được tạo ra bởi dao động của một trụ tròn trong một miền lưu chất tĩnh như trình bày ở hình 4.20. Chuyển động của trụ tròn được mô tả bởi dao động điều hòa như sau

$$x(t) = x_0 - A \sin(2\pi ft) \quad (4.35)$$

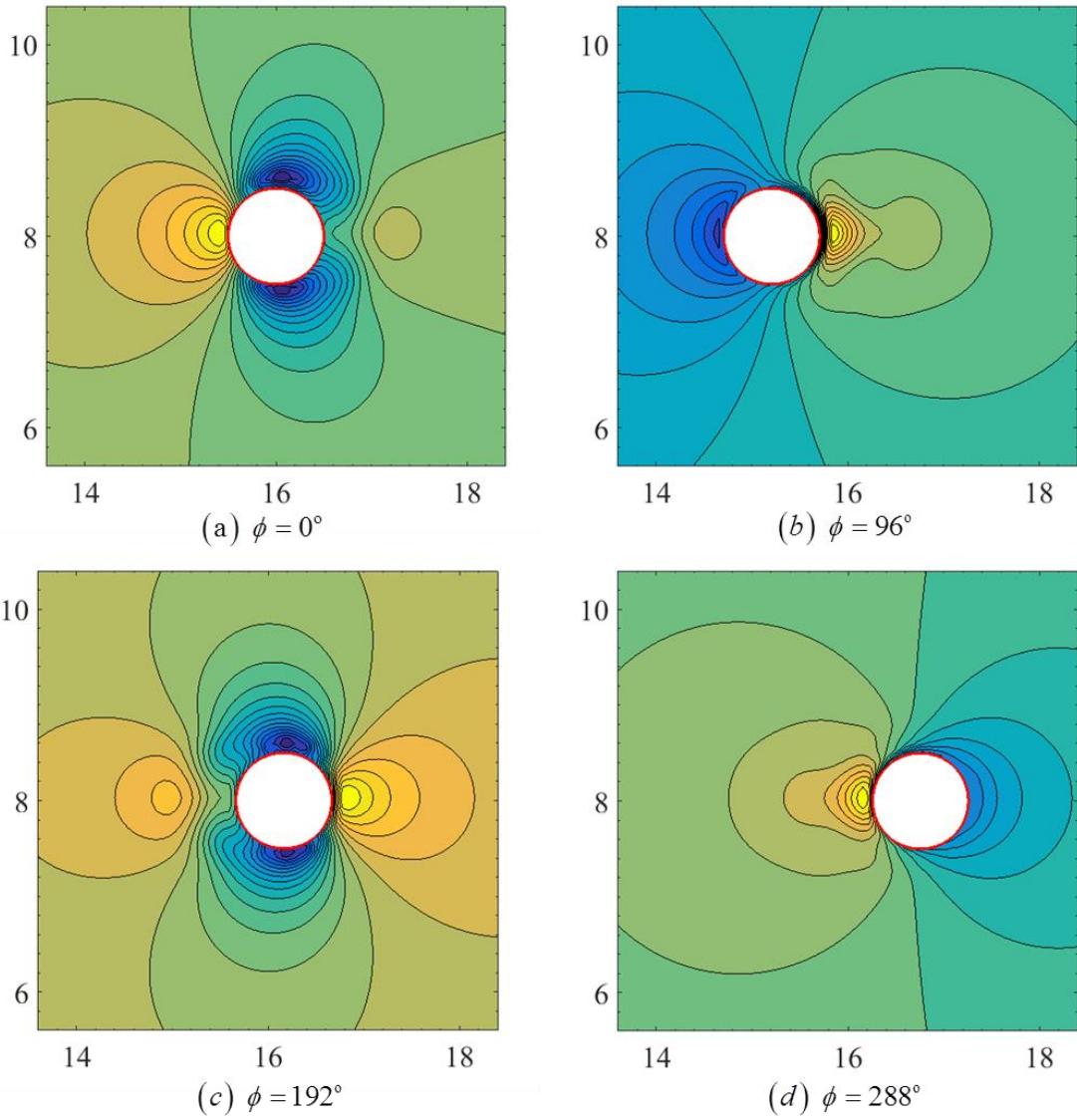
ở đây $x(t)$ là tọa độ theo phương x của tâm trụ tròn, x_0 là tọa độ theo phương x của tâm trụ tròn tại thời điểm $t=0$. A và f là biên độ và tần số dao động. Hai tham số xác định đặc tính của dòng chảy là: hệ số Reynolds $Re = \rho U_{max} D / \mu$ và hệ số Keulegan-Carpenter $KC = U_{max} / fD$, ở đây U_{max} là vận tốc cực đại của trụ tròn dao động. Bài toán này sẽ được tiến hành mô phỏng ở $Re=100$ và $KC=5$ tương ứng với kết quả thực nghiệm và mô phỏng số của Dütsch và cộng sự [139].



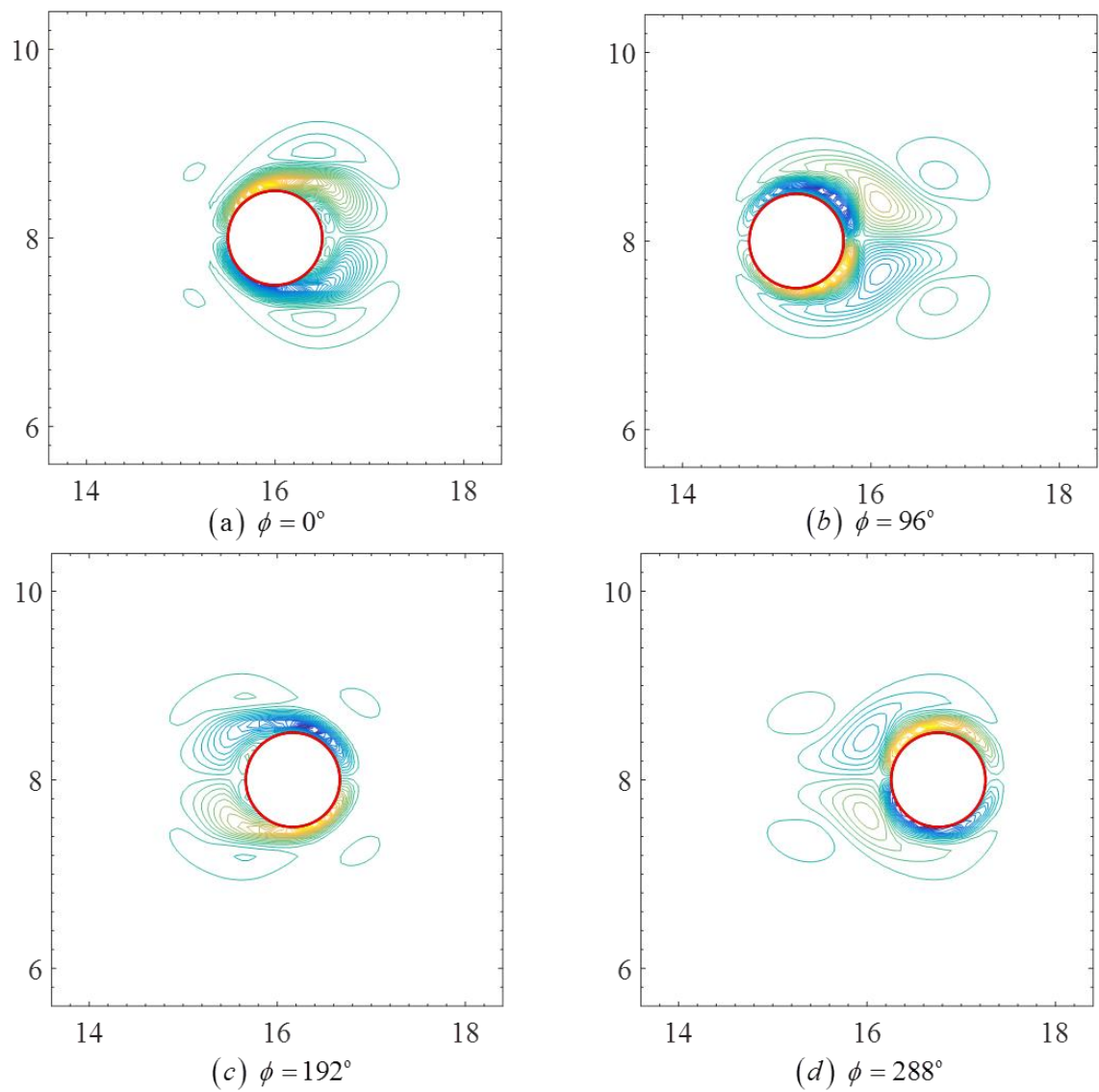
Hình 4.20: Điều kiện biên và miền tính toán của bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh.

Miền tính toán và điều kiện biên của bài toán được cho như hình 4.20. Miền tính toán được chọn là $\Omega = [0, 32D] \times [0, 16D]$. Vị trí ban đầu của tâm trụ tròn tại tâm của miền tính toán. Các điều kiện biên Neumann được áp đặt cho cả vận tốc và áp suất trên biên của miền tính toán. Một lưới đều 400×200 được sử dụng để rời rạc miền lưu chất trong khi trụ tròn được rời rạc bởi 42 điểm lưới. Bước thời gian $\Delta t = 10^{-4}$ s được sử dụng để mô phỏng bài toán.

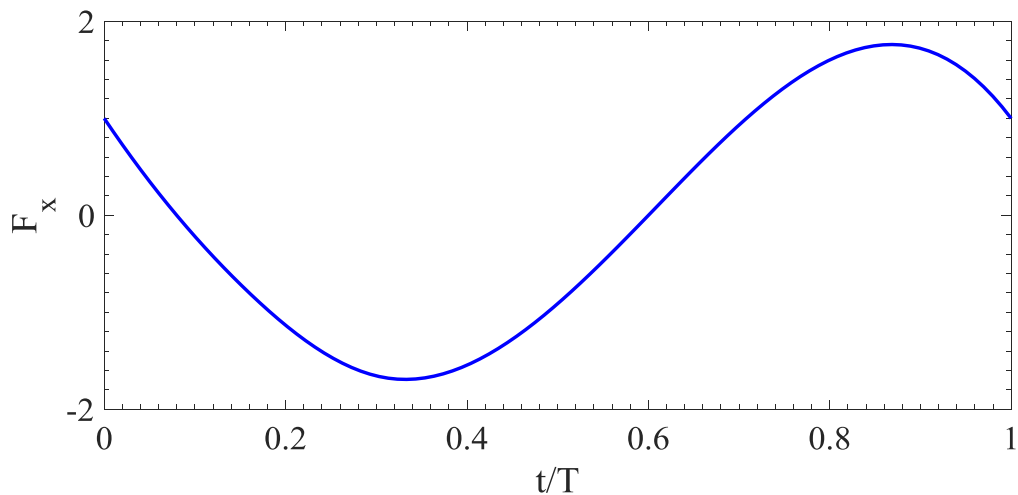
Áp suất và đường bao xoáy ở 4 thời điểm khác nhau ($\phi = 2\pi ft = 0^\circ, 96^\circ, 192^\circ, 288^\circ$) được trình bày ở hình 4.21 và hình 4.22. Chúng ta thấy rằng kết quả hiển thị đường bao xoáy và áp suất có sự tương đồng rất tốt với kết quả của Dütsch và cộng sự [139]. Sự phát triển lực cản F_x theo chiều dao động được trình bày trong một chu kỳ dao động trong hình 4.23, kết quả cho thấy sự đồng thuận rất tốt với kết quả thực nghiệm của Dütsch và cộng sự [139].



Hình 4.21: Áp suất cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh ở các thời điểm khác nhau: $\phi = 2\pi ft = 0^\circ, 96^\circ, 192^\circ, 288^\circ$.



Hình 4.22: Xoáy cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh ở các thời điểm khác nhau: $\phi = 2\pi ft = 0^\circ, 96^\circ, 192^\circ, 288^\circ$.



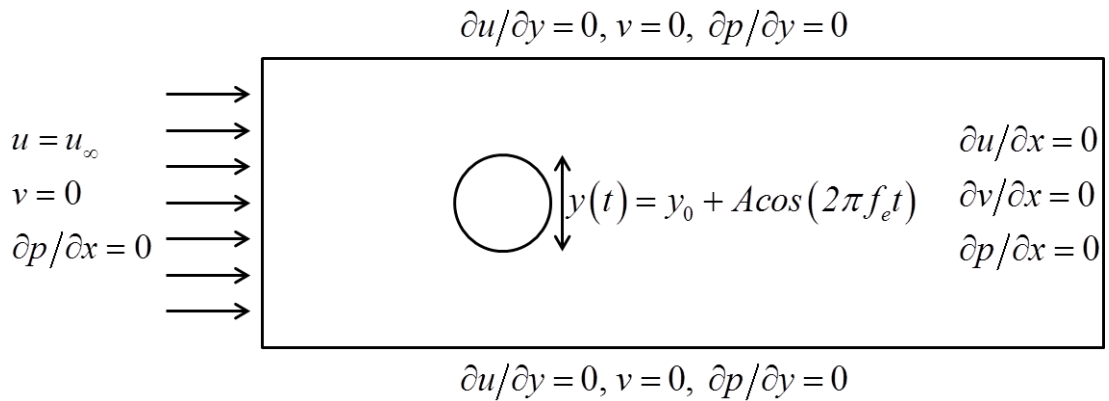
Hình 4.23: Đồ thị lực cản trong một chu kỳ dao động cho bài toán trụ tròn dao động trực tuyến trong một miền lưu chất tĩnh.

4.5.4. Bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do

Tiếp theo, chúng ta xét bài toán trụ tròn dao động cắt ngang một dòng chảy tự do như trình bày ở hình 4.24 . Chuyển động cắt ngang dòng chảy của trụ tròn được mô tả bởi dao động điều hòa như sau

$$y(t) = y_0 + A \cos(2\pi f_e t) \quad (4.36)$$

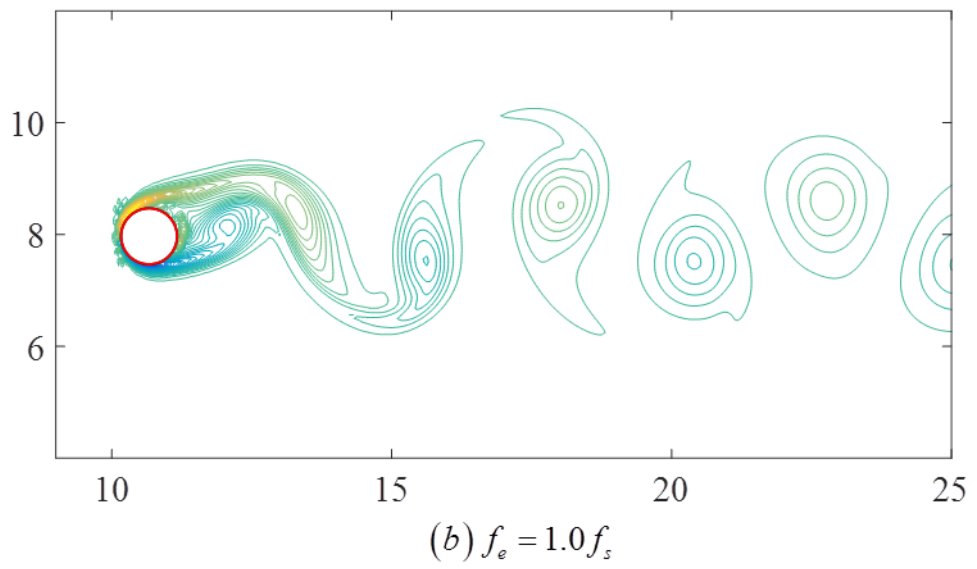
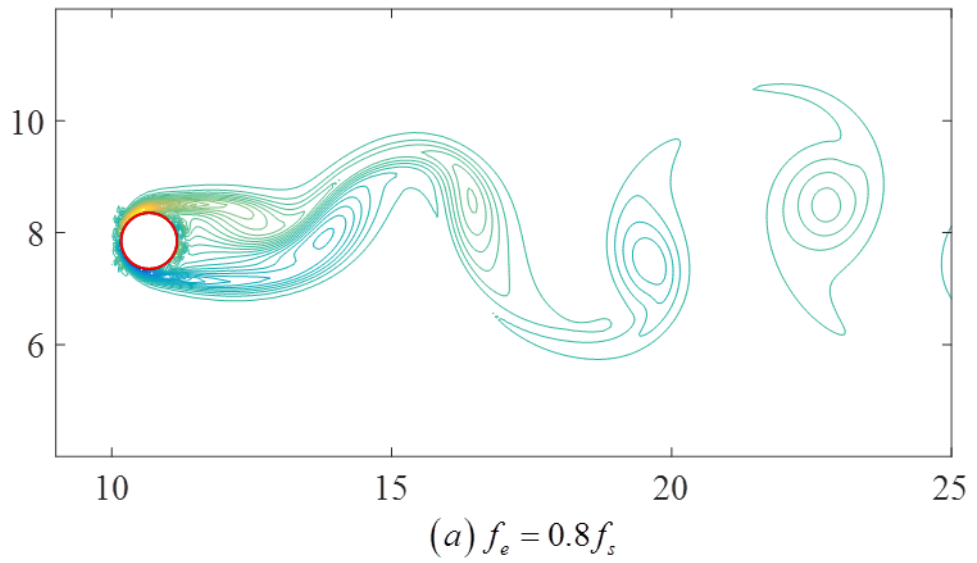
ở đây $y(t)$ là tọa độ theo phương y của tâm trụ tròn, y_0 là tọa độ theo phương y của tâm trụ tròn tại thời điểm $t = 0$. Biên độ dao động của trụ tròn được chọn là $A = 0.2D$, với D là đường kính ống trụ. Hệ số Reynolds cho bài toán này được chọn là $Re = 185$. Chúng ta sẽ mô phỏng bài toán ở hai tần số dao động khác nhau $f_e = 0.8f_s$ và $1.0f_s$, ở đây f_s là tần số dao động xoáy tự nhiên cho trường hợp trụ tròn đứng yên ở hệ số Reynolds $Re = 185$ ($f_s = 0.1852$).



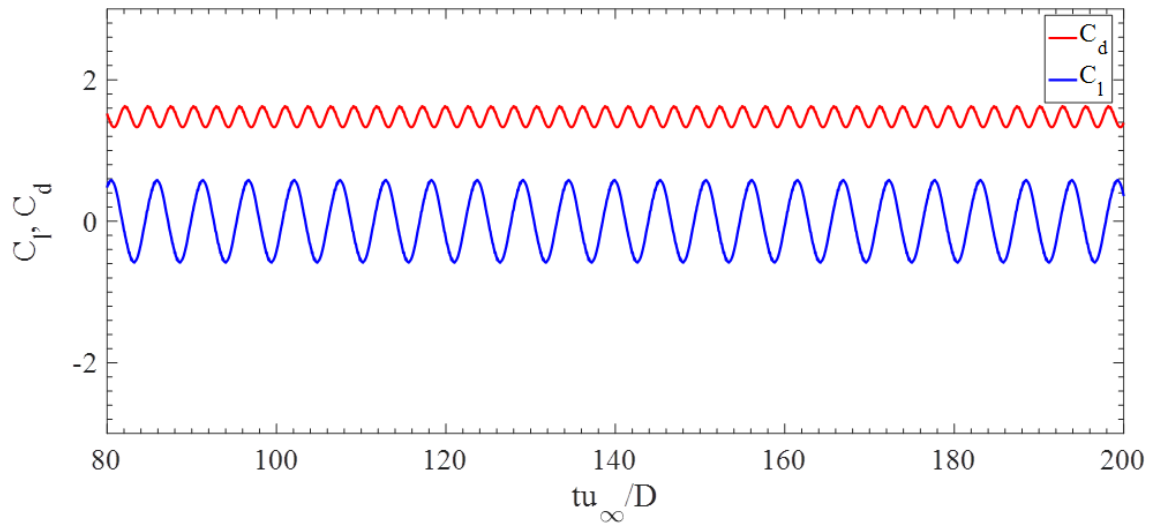
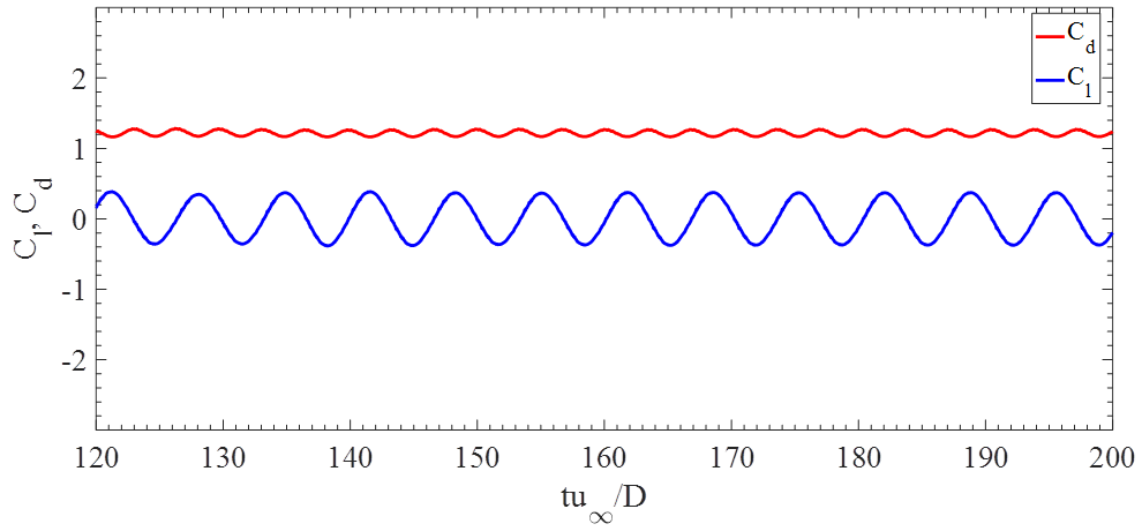
Hình 4.24: Điều kiện biên cho bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do.

Miền tính toán là $\Omega = [0, 32D] \times [0, 16D]$ được chia trên một lưới đều 512×256 . Trụ tròn được rời rạc bằng 42 điểm lưới. Bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s được sử dụng để mô phỏng bài toán. Điều kiện biên dòng vào ($u = u_\infty = 1, v = 0$) được áp đặt ở biên trái. Cả biên trên và biên dưới được áp đặt điều kiện biên không trượt ($\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0$), điều kiện biên dòng ra ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$) được áp đặt cho biên phải của miền tính toán.

Trường xoáy tức thời ở các thời điểm khác nhau được trình bày ở hình 4.25, cho thấy một xoáy có chu kỳ. Đồ thị theo thời gian của hệ số nâng và hệ số cản được vẽ ở hình 4.26. Bảng 4.3 so sánh giá trị trung bình hệ số nâng và hệ số cản, qua đó cho thấy một sự tương đồng rất tốt với các kết quả ở tài liệu tham khảo.



Hình 4.25: Trường xoáy tức thời của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do ở các tần số $f_e = 0.8f_s$ và $f_e = 1.1f_s$.



Hình 4.26: Đồ thị lực nâng và lực cản của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do ở các tần số $f_e = 0.8f_s$ và $f_e = 1.1f_s$.

Bảng 4.3: Bảng so sánh lực cản trung bình và biên độ dao động của lực nâng và lực cản của bài toán trụ tròn dao động cắt ngang trong một dòng chảy tự do ở các tần số dao động $f_e = 0.8f_s$ và $f_e = 1.1f_s$.

	Tác giả	\bar{C}_d	$(C'_d)_{rms}$	$(C'_l)_{rms}$
$f_e/f_s = 0.8$	Guilmineau & Queutey [140]	1.194	0.038	0.074
	Kim & Choi [30]	1.235	0.037	0.068
	Uhlmann [57]	1.380	-	0.176
	Yang và cộng sự [63]	1.290	0.043	0.070
	Cai [127]	1.229	0.036	0.235
	Luận án	1.217	0.035	0.239
$f_e/f_s = 1.0$	Guilmineau & Queutey [140]	1.506	0.134	0.420
	Kim & Choi [30]	1.537	0.140	0.376
	Cai [127]	1.511	0.117	0.442
	Luận án	1.477	0.102	0.436

4.6. Kết luận

Trong chương này đã đề xuất kết phương pháp IB với phương pháp PGD trong việc giải quyết các bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng. Sau đây là một số điểm nổi bật đã được trình bày ở chương này:

- Đề xuất giải thuật kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD trong việc giải quyết bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng.
- Áp dụng phương pháp đề xuất vào việc tính toán, mô phỏng các bài toán tương tác giữa dòng chất lỏng nhớt không nén qua vật cản biên cứng đứng yên và di chuyển: bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán, bài toán dòng chảy qua một trụ tròn ở các hệ số Reynolds khác nhau, bài toán dòng chảy qua một trụ tròn dao động trực tuyến và bài toán trụ tròn dao động cắt ngang một dòng chảy tự do. Điều đó cho thấy khả năng ứng dụng được cho nhiều bài toán khác nhau của phương pháp được đề xuất.

- Các kết quả mô phỏng về vận tốc, áp suất, đường dòng, xoáy, hệ số nâng và hệ số cản được trình bày và so sánh với các kết quả đã công bố. Từ các kết quả so sánh, cho thấy sự đồng thuận khá tốt của phương pháp đề xuất với các kết quả tham khảo đã công bố.
- Các kết quả về sai số của phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD cho bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán và bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định ở hệ số Reynolds $Re = 100$ đã được trình bày. Từ các kết quả về sai số cho thấy sai số của bài toán Lid-driven cavity với trụ tròn ở tâm miền tính toán có bậc hội tụ là 1.32, trong khi đó sai số của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định có bậc hội tụ là 1.36.
- So sánh về thời gian tính toán của phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng được thực hiện với bài toán dòng chảy qua trụ tròn cố định ở hệ số Reynolds $Re = 100$. Kết quả cho thấy phương pháp PGD có thời gian tính toán tốt hơn phương pháp sai phân hữu hạn, cụ thể tỉ lệ $t_{FDM}/t_{PGD} = 2.2$ với 512×256 điểm lưới và $t_{FDM}/t_{PGD} = 4.6$ với 2048×1024 điểm lưới.

Các công bố khoa học được thực hiện từ chương này:

1. **C. Le-Quoc**, Linh A. Le, V. Ho-Huu, P. D. Huynh, and T. Nguyen-Thoi, “An Immersed Boundary Proper Generalized Decomposition (Ib-Pgd) for Fluid–Structure Interaction Problems,” *International Journal of Computational Methods*, (2017), 1850045. (ISI)
2. **Lê Quốc Cường**, Phan Đức Huỳnh, Nguyễn Hoàng Sơn, “Mô phỏng dòng chảy nhớt không nén qua trụ tròn bằng phương pháp biên nhúng kết hợp PGD,” *Tạp chí Khoa học và Công nghệ các trường Đại học kỹ thuật*, 2014 (102), 101-105.
3. **Cuong, L.Q**, Huỳnh, P.D, “Numerically study effectiveness of control surface on aerodynamic of bridge deck by using immersed boundary method,”

Proceedings of the 2012 International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD2012), HoChiMinh City, Vietnam, 1-5, 2012.

4. **Lê Quốc Cường**, Phan Đức Huỳnh, Nguyễn Hoài Sơn và Nguyễn Bá Duy, “Phương pháp IB-PGD dựa trên sơ đồ sai phân bậc hai trên lưới không đều cho các bài toán tương tác rắn – lỏng,” *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, 8-9/12/2017, Hà Nội – Việt Nam.*

Chương 5

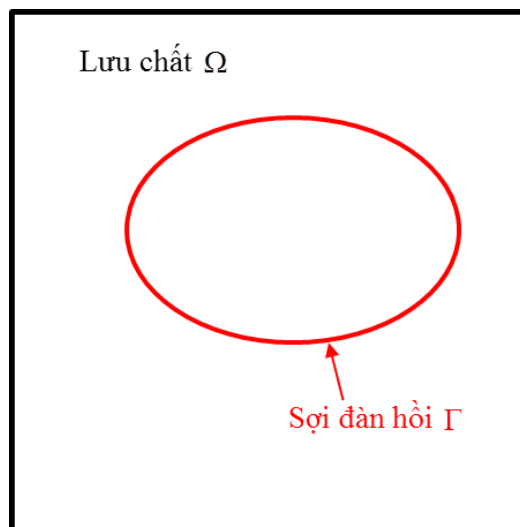
PHƯƠNG PHÁP BIÊN NHÚNG KẾT HỢP VỚI PHƯƠNG PHÁP PGD CHO BÀI TOÁN DÒNG CHẢY NHỚT KHÔNG NÉN QUA VẬT CẢN BIÊN ĐÀN HỒI

5.1. Giới thiệu

Trong chương này sẽ đề xuất phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD để giải các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi. Ảnh hưởng của biên đàn hồi lên lưu chất được thay thế bằng cách đưa thành phần lực cưỡng bức vào phương trình chuyển động của lưu chất thông qua phương pháp IB. Sự phân ly giữa áp suất và vận tốc được thực hiện bằng phương pháp chiếu, sau đó phương pháp PGD được áp dụng để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng để tìm các biến của dòng chảy.

5.2. Hệ phương trình chuyển động

Trong phần này, chúng ta bắt đầu với công thức toán cho phương trình chuyển động của dòng lưu chất nhớt không nén trong không gian hai chiều chứa một biên nhúng đàn hồi như hình 5.1.



Hình 5.1: Hệ lưu chất – biên nhúng đàn hồi.

Các biến Euler được định nghĩa trên tọa độ Đề-các $\mathbf{x}=(x,y)$, và các biến Lagrange được định nghĩa trên hệ tọa độ vật lý s . Biến Euler bao gồm vận tốc $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=(u(\mathbf{x},t),v(\mathbf{x},t))$, áp suất $p(\mathbf{x},t)$, khối lượng riêng $\rho(\mathbf{x},t)$ và lực khối $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=(f_x(\mathbf{x},t),f_y(\mathbf{x},t))$. Biến Lagrange bao gồm vị trí biên đàn hồi $\mathbf{X}(s,t)$ và lực khối trên biên $\mathbf{F}(s,t)=(F_x(s,t),F_y(s,t))$. Phương trình chuyển động của hệ được cho như sau

$$\rho(\mathbf{x},t)\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f}(\mathbf{x},t)-\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{g} \quad (5.1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\int_{\Gamma}\mathbf{F}(s,t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t))ds \quad (5.3)$$

$$\rho(\mathbf{x},t)=\rho_f+\int_{\Gamma}\rho_s(s)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t))ds \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial\mathbf{X}(s,t)}{\partial t}=\mathbf{U}(s,t)=\mathbf{u}(\mathbf{X}(s,t),t)=\int_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X}(s,t))d\mathbf{x} \quad (5.5)$$

ở đây hằng số μ là hệ số nhớt của chất lỏng, ρ_f là khối lượng trên mỗi đơn vị diện tích của chất lỏng, $\delta(\mathbf{x})=\delta(x)\delta(y)$ là hàm rời rạc Delta, \mathbf{g} là gia tốc trọng trường và $\mathbf{g}=(0,g_y)$ và $\rho_s(s)$ là khối lượng riêng của vật thể (chú ý rằng ρ_s không phụ thuộc thời gian vì khối lượng được bảo toàn). Lực khối trên biên $\mathbf{F}(s,t)$ được cho bởi đạo hàm biến phân “ $\delta E/\delta\mathbf{X}$ ” của hàm năng lượng đàn hồi $E(\mathbf{X}(s,t))$.

Phương trình (5.1) và (5.2) là phương trình chuyển động của lưu chất, phương trình (5.5) là phương trình chuyển động của biên nhúng đàn hồi.

5.3. Lực trên biên đàn hồi

Trong phần này, công thức biên nhúng cho phương trình chuyển động của bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi được đề xuất bởi Zhu và Peskin [37] sẽ được dẫn ra. Xét s là tọa độ cong gắn với tọa độ vật lý, $\mathbf{X}(s,t)$ là vị trí của biên nhúng ở thời gian t trong hệ tọa độ Đề-các.

Chúng ta sẽ xác định lực đàn hồi được phát sinh do biến dạng của cấu trúc kết cấu trong mối quan hệ với hàm năng lượng đàn hồi $E(\mathbf{X}(s,t))$.

Bây giờ chúng ta xét sự nhiễu loạn $\wp \mathbf{X}(s,t)$ của cấu trúc $\mathbf{X}(s,t)$

$$\mathbf{X}(s,t) \rightarrow \mathbf{X}(s,t) + \wp \mathbf{X}(s,t) \quad (5.6)$$

(chú ý rằng, ký tự \wp được sử dụng để ký hiệu cho toán tử biến phân thay vì ký tự truyền thống δ bởi vì ký tự δ đã được sử dụng để ký hiệu hàm Dirac delta). Kết quả của sự nhiễu loạn trong năng lượng đàn hồi sẽ là một hàm tuyến tính của sự nhiễu loạn trong cấu trúc của vật chất. Vì vậy, có thể viết như sau

$$\wp E[\mathbf{X}(s,t)] = \int_{\Gamma} (-\mathbf{F}(s,t)) \wp \mathbf{X}(s,t) ds \quad (5.7)$$

Do định nghĩa, hàm $\mathbf{F}(s,t)$ là đạo hàm biến phân của $E[\mathbf{X}(s,t)]$, và được ký hiệu “ $\mathbf{F}(s,t) = -\wp E / \wp \mathbf{X}$ ” (theo nguyên lý công ảo). Chúng ta phân ly hàm năng lượng đàn hồi E thành năng lượng kéo E_s và năng lượng uốn E_b .

5.3.1. Lực kéo

Năng lượng kéo được trình bày dưới dạng công thức như sau

$$E_s[\mathbf{X}(s,t)] = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right)^2 ds \quad (5.8)$$

ở đây κ_s là hệ số kéo.

Chú ý rằng $\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| = \left(\frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right)^{1/2}$ (5.9)

Vì vậy

$$\begin{aligned} \wp \left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right)^{1/2-1} \wp \left\{ \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right)^{-1/2} 2 \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \wp \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \\ &= \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s}{\left| \partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s \right|} \frac{\partial}{\partial s} (\wp \mathbf{X}(s,t)) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Chúng ta áp dụng toán tử nhiễu loạn cho cả hai vế của phương trình (5.8), ta được

$$\begin{aligned} \wp E_s [\mathbf{X}(s,t)] &= \wp \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right)^2 ds \right\} \\ &= \int_{\Gamma} \kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s}{\left| \partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s \right|} \frac{\partial}{\partial s} (\wp \mathbf{X}(s,t)) ds \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\text{Đặt} \begin{cases} U = \kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s}{\left| \partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s \right|} \\ dV = \frac{\partial}{\partial s} (\wp \mathbf{X}(s,t)) ds \end{cases} \quad (5.12)$$

Thực hiện tích phân từng phần số hạng ở vế phải của phương trình (5.11), chúng ta tìm được

$$\begin{aligned} \wp E_s [\mathbf{X}(s,t)] &= \kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s}{\left| \partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s \right|} \wp \mathbf{X}(s,t) \Big|_{\Gamma} \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s}{\left| \partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s \right|} \right) \wp \mathbf{X}(s,t) ds \end{aligned} \quad (5.12)$$

Theo nguyên lý biến phân và các điều kiện biên thì thành phần thứ nhất của phương trình (5.12) bằng không, vì vậy

$$\delta E_s[\mathbf{X}(s,t)] = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s}{\left| \partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s \right|} \right) \delta \mathbf{X}(s,t) ds \quad (5.13)$$

Bằng định nghĩa, lực chống kéo-nén \mathbf{F}_s được tính như sau

$$\mathbf{F}_s(s,t) = \frac{\partial}{\partial s} \left[\kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s}{\left| \partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s \right|} \right] \quad (5.14)$$

Đặt

$$T = \kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial s} \right| - 1 \right) = \text{ứng suất} \quad (5.15)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s}{\left| \partial \mathbf{X}(s,t)/\partial s \right|} = \text{tiếp tuyến đơn vị} \quad (5.16)$$

Thay (5.15) và (5.16) vào phương trình (5.14) ta được công thức tính lực căng trên biên đàn hồi như sau

$$\mathbf{F}_s(s,t) = \frac{\partial}{\partial s} (T\boldsymbol{\tau}) \quad (5.17)$$

5.3.2. Lực uốn

Năng lượng uốn được trình bày dưới dạng công thức như sau

$$E_b[\mathbf{X}(s,t)] = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \kappa_b \left| \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right|^2 ds \quad (5.18)$$

ở đây κ_b là độ cứng uốn.

Chú ý rằng

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right|^2 = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right)^2 \quad (5.19)$$

vì vậy

$$\begin{aligned} \wp \left| \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right|^2 &= 2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \wp \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \\ &= 2 \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \frac{\partial^2}{\partial s} (\wp \mathbf{X}(s,t)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Áp dụng toán tử nhiễu loạn vào cả hai vế của phương trình (5.18), ta được

$$\begin{aligned} \wp E_b [\mathbf{X}(s,t)] &= \wp \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \kappa_b \left| \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right|^2 ds \right\} \\ &= \int_{\Gamma} \kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\wp \mathbf{X}(s,t)) ds \end{aligned} \quad (4.21)$$

Đặt

$$\begin{cases} U = \kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \\ dV = \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\wp \mathbf{X}(s,t)) ds \end{cases} \quad (5.22)$$

Thực hiện tích phân từng phần số hạng ở vế phải của phương trình (5.21), ta được

$$\begin{aligned} \wp E_b [\mathbf{X}(s,t)] &= \kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial s} (\wp \mathbf{X}(s,t)) \Big|_{\Gamma} \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left(\kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} (\wp \mathbf{X}(s,t)) ds \end{aligned} \quad (5.23)$$

Đặt

$$\begin{cases} U = \frac{\partial}{\partial s} \left(\kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right) \\ dV = \frac{\partial}{\partial s} (\wp \mathbf{X}(s,t)) ds \end{cases} \quad (5.24)$$

Thực hiện tích phân từng phần số hạng thứ hai ở vế phải của phương trình (5.23), ta được

$$\begin{aligned} \wp E_b [\mathbf{X}(s,t)] &= \kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial s} (\wp \mathbf{X}(s,t)) \Big|_{\Gamma} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial s} \left(\kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right) \wp \mathbf{X}(s,t) \Big|_{\Gamma} \\ &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right) \wp \mathbf{X}(s,t) ds \end{aligned} \quad (5.25)$$

Theo nguyên lý biến phân và các điều kiện biên thì các thành phần thứ nhất và thứ hai của phương trình (5.25) bằng không, vì vậy

$$\wp E_b [\mathbf{X}(s,t)] = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right) \wp \mathbf{X}(s,t) ds \quad (5.26)$$

Từ phương trình (5.26), bằng định nghĩa ta có lực uốn trên biên đàn hồi được xác định như sau

$$\mathbf{F}_b = - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right) \quad (5.27)$$

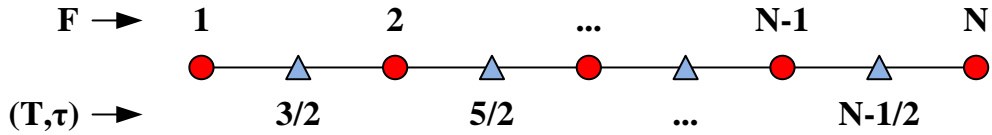
Vì vậy, tổng lực khối Lagrange tương ứng với các lực được phát sinh do biên đàn hồi (lực kéo-nén và lực uốn) là

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s,t) &= \mathbf{F}_s(s,t) + \mathbf{F}_b(s,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (T\tau) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[\kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s,t)}{\partial s^2} \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.4. Phương pháp số

5.4.1. Lực kéo và lực uốn

Gọi Δt là bước thời gian và n là chỉ số bước thời gian, ta có: $\mathbf{X}^n = \mathbf{X}(s, n\Delta t)$, $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}, n\Delta t)$, $p^n = p(\mathbf{x}, n\Delta t)$, $\rho^n = \rho(\mathbf{x}, n\Delta t)$. Lưới số le được sử dụng trong hệ tọa độ Lagrange như trình bày ở hình 5.1. Xét vật thể (biên đàn hồi) được trình bày bằng tập hợp các điểm rời rạc, $s = k\Delta s$, ở đây k là một số nguyên. Lực kéo và pháp tuyến đơn vị được định nghĩa ở các điểm bán nguyên được cho bởi $s = (k + 1/2)\Delta s$, và lực khối được định nghĩa ở các điểm nguyên. Chỉ số bắt đầu từ đầu tự do ($k = 0$) và kết thúc ở đầu cố định ($k = N$).



Hình 5.2: Hệ tọa độ Lagrange cho biên đàn hồi.

Xấp xỉ sai phân cho đạo hàm bậc nhất và đạo hàm bậc hai của một hàm bất kỳ $\phi(s)$ được tính như sau

$$\frac{\partial \phi(s)}{\partial s} \approx \frac{\phi\left(s + \frac{\Delta s}{2}\right) - \phi\left(s - \frac{\Delta s}{2}\right)}{\Delta s} \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(s)}{\partial s^2} \approx \frac{\phi(s - \Delta s) - 2\phi(s) + \phi(s + \Delta s)}{(\Delta s)^2} \quad (5.30)$$

5.4.1.1. Lực kéo tại các điểm trên biên nhúng

Lực kéo trên biên đàn hồi được xác định bằng công thức sau

$$\mathbf{F}_s(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \left[\kappa_s \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial s} \right| - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial s} \right] \quad (5.31)$$

Đặt

$$\mathbf{T}_{k+1/2} = \kappa_s \left(\frac{|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k|}{\Delta s} - 1 \right) \quad (5.32)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{k+1/2} = \frac{\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k}{|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k|} \quad (5.33)$$

ở đây $k = 1, \dots, N-1$ vì hệ tọa độ Lagrang có $(N-1)$ điểm bán nguyên.

Từ (5.31), (5.32) và (5.33) ta có công thức tính lực kéo tại điểm k trên biên đàn hồi được tính như sau

$$(\mathbf{F}_s)_k = \frac{(\mathbf{T}_{k+1/2} \boldsymbol{\tau}_{k+1/2} - \mathbf{T}_{k-1/2} \boldsymbol{\tau}_{k-1/2})}{\Delta s} \quad (5.34)$$

5.4.1.2. Lực uốn tại các điểm trên biên nhúng

Lực uốn trên biên đàn hồi được xác định bằng công thức sau

$$\mathbf{F}_b(s, t) = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\kappa_b \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s, t)}{\partial s^2} \right) \quad (5.35)$$

$$\text{Đặt } \frac{\partial^2 \mathbf{X}(s, t)}{\partial s^2} = \mathbf{C}_k = \frac{\mathbf{X}_{k+1} - 2\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_{k-1}}{(\Delta s)^2} \quad (5.36)$$

Từ (5.35) và (5.36) ta có công thức tính lực uốn tại điểm k trên biên đàn hồi được tính bằng công thức sau

$$(\mathbf{F}_b)_k = -\kappa_b \frac{\mathbf{C}_{k+1} - 2\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_{k-1}}{(\Delta s)^2} \quad (5.37)$$

Như vậy, giả sử ở bước thời gian thứ n chúng ta xác định được thành phần lực khối trên biên nhúng tại các điểm trên biên như sau

$$\mathbf{F}_k^n = (\mathbf{F}_s)_k^n + (\mathbf{F}_b)_k^n \quad (5.38)$$

Bây giờ lực khối trên biên nhúng sẽ được phân bố đến các điểm lưới xung quanh trên miền lưu chất theo công thức sau

$$\mathbf{f}_{i,j}^n = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^n \delta_h(\mathbf{x}_{i,j}^n - \mathbf{X}_k^n) \Delta s \quad (5.39)$$

với $\mathbf{x}_{i,j}$ và $\mathbf{f}_{i,j}$ là tọa độ điểm lưới (i, j) và lực khối tương ứng tại điểm đó.

$\delta_h(\mathbf{x})$ là một hàm rời rạc delta hai chiều,

$$\delta_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} \varphi\left(\frac{x}{h}\right) \varphi\left(\frac{y}{h}\right) \quad (5.40)$$

ở đây h là kích thước lưới, x và y là hai thành phần tọa độ Đề-các của \mathbf{x} và $\phi(r)$ là hàm rời rạc delta một chiều và $\phi(r)$ được chọn như trong [61] như sau

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2} \right), & 0 \leq |r| \leq 1 \\ \frac{1}{8} \left(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2} \right), & 1 \leq |r| \leq 2 \\ 0, & 2 \leq |r| \end{cases} \quad (5.41)$$

Trong trường hợp biên đàn hồi có khối lượng, khối lượng riêng của hệ ở bước thời gian n được tính như sau

$$\rho_{i,j}^n = \rho_f + \sum_{k=1}^N \rho_f \delta_h(\mathbf{x}_{i,j}^n - \mathbf{X}_k^n) \Delta s \quad (5.42)$$

Vì lực khối được tính ở các điểm trên biên nhúng và mở rộng đến toàn bộ các điểm lưới, hệ phương trình Navier – Stokes sẽ được giải để tìm vận tốc và áp suất ở các điểm lưới lưu chất. Trường vận tốc sau đó được nội suy để tìm vận tốc tại các điểm trên biên nhúng như sau

$$\mathbf{U}_k^{n+1}(\mathbf{X}_k) = \sum_{i,j} \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}_{i,j}) \delta_h(\mathbf{x}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{X}_k^{n+1}) h^2 \quad (5.43)$$

Từ vận tốc tại các điểm trên biên nhúng, vị trí của các điểm biên được xác định theo công thức sau

$$\mathbf{X}_k^{n+1} = \mathbf{X}_k^n + \Delta t \mathbf{U}_k^{n+1}(\mathbf{X}_k) \quad (5.44)$$

5.4.2. Phương pháp chiếu

Ở phần này, phương pháp chiếu [124] được áp dụng để phân ly vận tốc và áp suất trong hệ phương trình Navier-Stokes. Các bước của phương pháp chiếu được sử dụng trong phần này tương tự như ở chương 3, tuy nhiên cần lưu ý có một điểm khác biệt đó là sự xuất hiện của thành phần lực \mathbf{f} và $(-\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{g})$ trong phương trình Navier-Stokes. Trong phương pháp chiếu, việc rời rạc hệ phương trình (5.1) và (5.2) được trình bày như sau:

$$\rho^n \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} - \rho^n (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \mu \Delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}^n - \rho^n \mathbf{g} \quad (5.45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (5.46)$$

với điều kiện biên

$$\mathbf{u}^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b^{n+1} \quad (5.47)$$

Hệ phương trình (5.45) – (5.47) được giải theo trình tự như sau:

Bước 1: tính trực tiếp vận tốc trung gian \mathbf{u}^* từ phương trình động lượng (5.45) bỏ qua thành phần gradient áp suất

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\mu}{\rho^n} \Delta \mathbf{u}^n + \frac{1}{\rho^n} \mathbf{f}^n - \mathbf{g} \quad (5.48)$$

ở đây \mathbf{u}^n là vận tốc ở bước thời gian thứ n .

Bước 2: Hiệu chỉnh áp suất

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho^n}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (5.49)$$

Đây là phương trình Poisson cho áp suất, giải phương trình này chúng ta sẽ tìm được áp suất ở bước thời gian $n+1$.

Bước 3: Cập nhật vận tốc ở bước thời gian $n+1$.

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho^n} \nabla p^{n+1} \quad (5.50)$$

5.5. Giải thuật tổng quát

Trong phần này sẽ trình bày giải thuật tổng quát của phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi. Các bước của giải thuật được tiến hành tương tự như giải thuật cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên cứng đã trình bày ở chương 4, ngoại trừ bước tính lực trên biên đàn hồi có sự khác biệt với bước tính lực trên biên cứng như đã trình bày ở chương 4.

Ở bước thời gian thứ n chúng ta đã biết trường vận tốc \mathbf{u}^n , áp suất p^n của lưu chất \mathbf{u}^n , và vị trí của biên nhúng đàn hồi \mathbf{X}^n . Để giải quyết bài toán ở bước thời gian thứ $n+1$, chúng ta tiến hành các bước sau:

Bước 1: tính lực khối trên biên nhúng \mathbf{F}^n từ các phương trình (5.34), (5.37) và (5.38).

Bước 2: phân bố lực cưỡng bức từ các điểm trên biên nhúng đến các điểm lưới lưu chất xung quanh theo công thức (5.39), và tính khối lượng riêng ρ^n bằng công thức (5.42).

Bước 3: cập nhật vận tốc trung gian \mathbf{u}^* từ phương trình (5.48).

Bước 4: giải phương trình Poisson áp suất (5.49) bằng phương pháp PGD để tìm p^{n+1} ở dạng

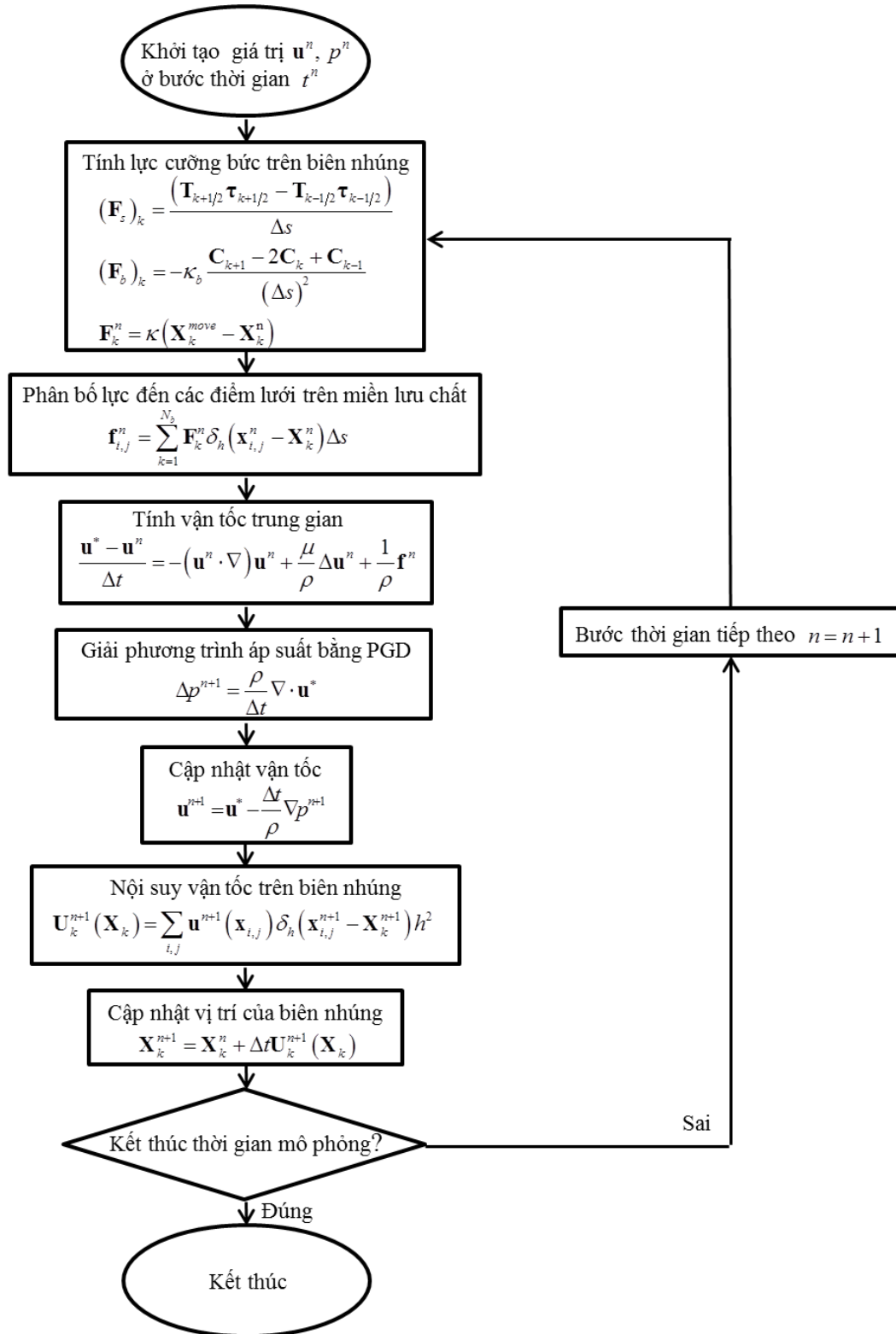
$$p^{n+1} = \sum_{i=1}^N F^i(x) G^i(y) \quad (5.51)$$

Bước 5: sử dụng công thức (5.50) để tìm \mathbf{u}^{n+1} .

Bước 6: nội suy tìm vận tốc biên nhúng \mathbf{U}^{n+1} bằng công thức (5.43)

Bước 7: tìm vị trí biên nhúng ở bước thời gian mới \mathbf{X}^{n+1} từ phương trình (5.44).

Hình 5.3 trình bày sơ đồ giải thuật của phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi. Trong sơ đồ giải thuật, các bước tính lực tại các điểm trên biên nhúng, phân bố lực đến các điểm lưới trên miền lưu chất, tính vận tốc và áp suất của lưu chất và cập nhật vận tốc của biên nhúng đã được trình bày. Chi tiết về giải thuật giải phương trình Poisson cho áp suất bằng phương pháp PGD đã được trình bày cụ thể ở phần 3.6.

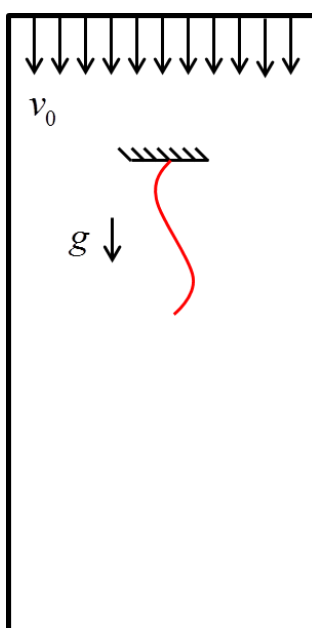


Hình 5.3: Sơ đồ giải thuật kết hợp phương pháp IB với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi.

5.6. Kết quả mô phỏng số

5.6.1. Bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi

Các bài toán liên quan đến sự tương tác giữa lưu chất với vật thể đàn hồi ngày càng phổ biến và được mở rộng nghiên cứu. Trong phần này chúng ta sẽ tiến hành mô phỏng dòng chảy nhớt không nén tương tác với sợi đàn hồi. Zhang [41] đã nghiên cứu thực nghiệm động lực học của sợi đàn hồi trong một dòng chảy nhớt không nén như hình 5.4.



Hình 5.4: Dòng chảy nhớt không nén qua một sợi đàn hồi.

Sau đây là một số giả thiết được thực hiện trong việc mô phỏng bài toán sợi đàn hồi trong dòng chảy nhớt không nén:

- Sợi đàn hồi là đường cong một chiều bỏ qua thể tích và khối lượng, được phân bố đều trên đường cong một chiều này và được nhúng hoàn toàn trong miền lưu chất. Sợi đàn hồi ứng xử như là một sợi vật liệu đàn hồi tuyến tính, có thể bị kéo, nén và uốn.

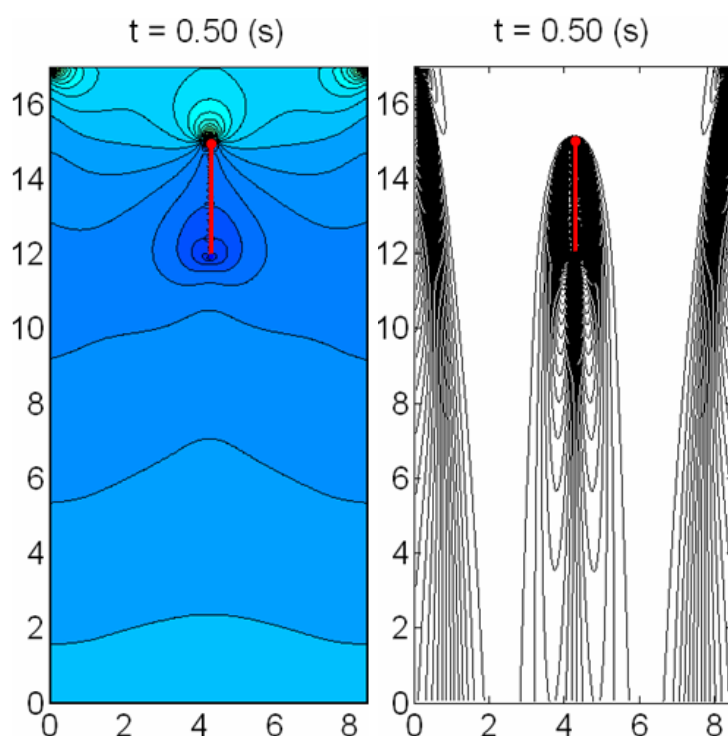
- Dòng chảy là một màng lưu chất nhớt, không nén với chiều dày bằng không. Lực căng bề mặt giữa lưu chất và sợi đàn hồi có ảnh hưởng không đáng kể trên chuyển động của sợi đàn hồi. Dòng chảy của lưu chất là một dòng chảy tầng trong mặt phẳng hai chiều được mô tả bằng hệ phương trình Navier-Stokes không nén.
- Hệ sợi đàn hồi-lưu chất không bị ảnh hưởng lớn bởi chiều dài của miền lưu chất hoặc điều kiện dòng chảy ra ở bên dưới của miền lưu chất.
- Hệ số độ cứng đàn hồi kéo trong mô phỏng được chọn để sợi đàn hồi không bị kéo dài ra.

Các thông số mô phỏng của bài toán được trình bày như trong bảng 5.1.

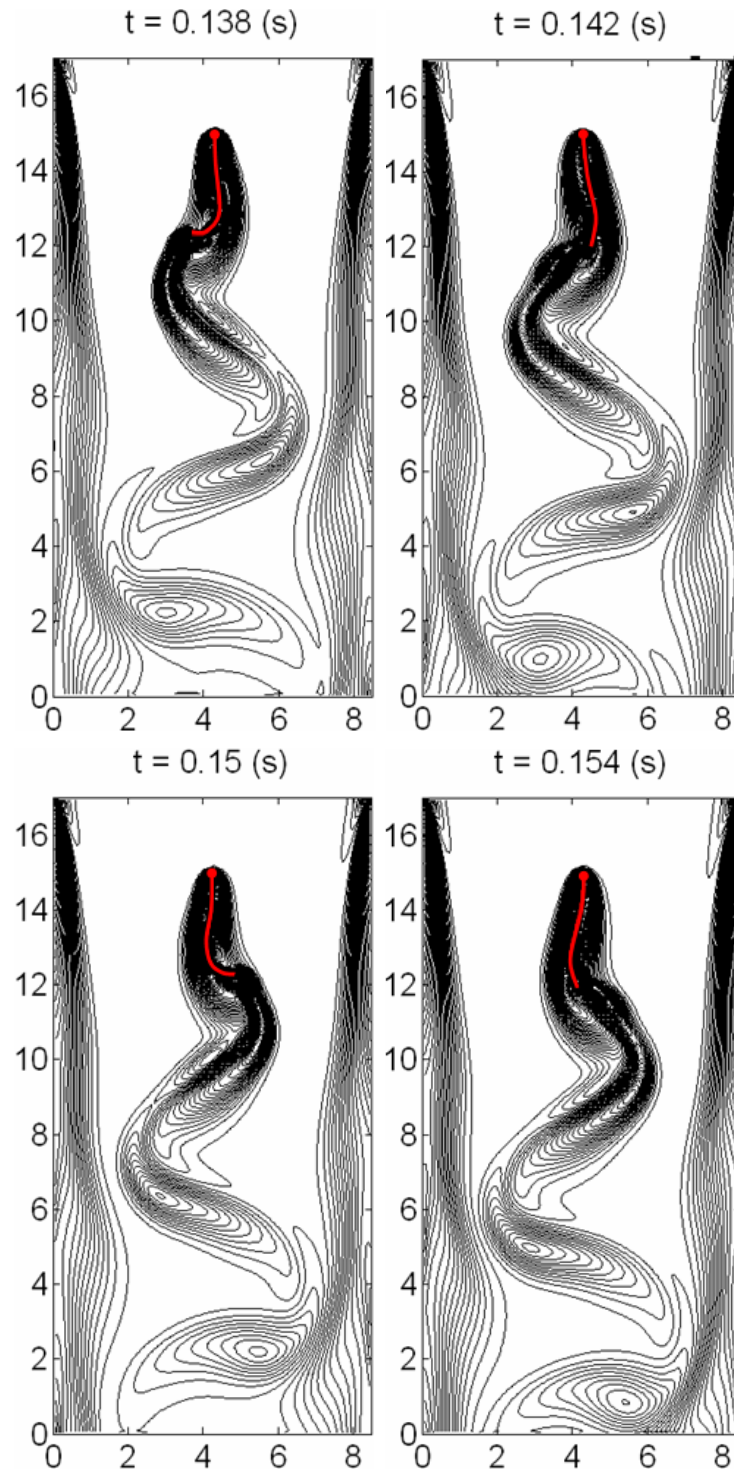
Bảng 5.1: Thông số mô phỏng của bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi.

	Giá trị thực nghiệm [41]	Giá trị mô phỏng
Vận tốc dòng chảy vào (v_0)	280 cm/s	280 cm/s
Độ nhớt động lực học của lưu chất (μ)	1.2×10^{-3} g/s	1.2×10^{-3} g/s
Khối lượng riêng của lưu chất (ρ_f)	3×10^{-4} g/cm ²	3×10^{-4} g/cm ²
Chiều dày miền lưu chất	$(3-4) \times 10^{-4}$ cm	0.0 cm
Đường kính sợi đàn hồi	0.015 cm	0.0 cm
Chiều dài sợi đàn hồi (L)	3 cm	3 cm
Khối lượng riêng của sợi đàn hồi (ρ_s)	4×10^{-4} g/cm	4×10^{-4} g/cm
Độ cứng của sợi đàn hồi (κ_b)	0.1 erg.cm	0.1 erg.cm
Gia tốc trọng trường (g_y)	980 cm/s ²	980 cm/s ²
Chiều rộng miền lưu chất	8.5 cm	8.5 cm
Chiều dài miền lưu chất	120 cm	17 cm

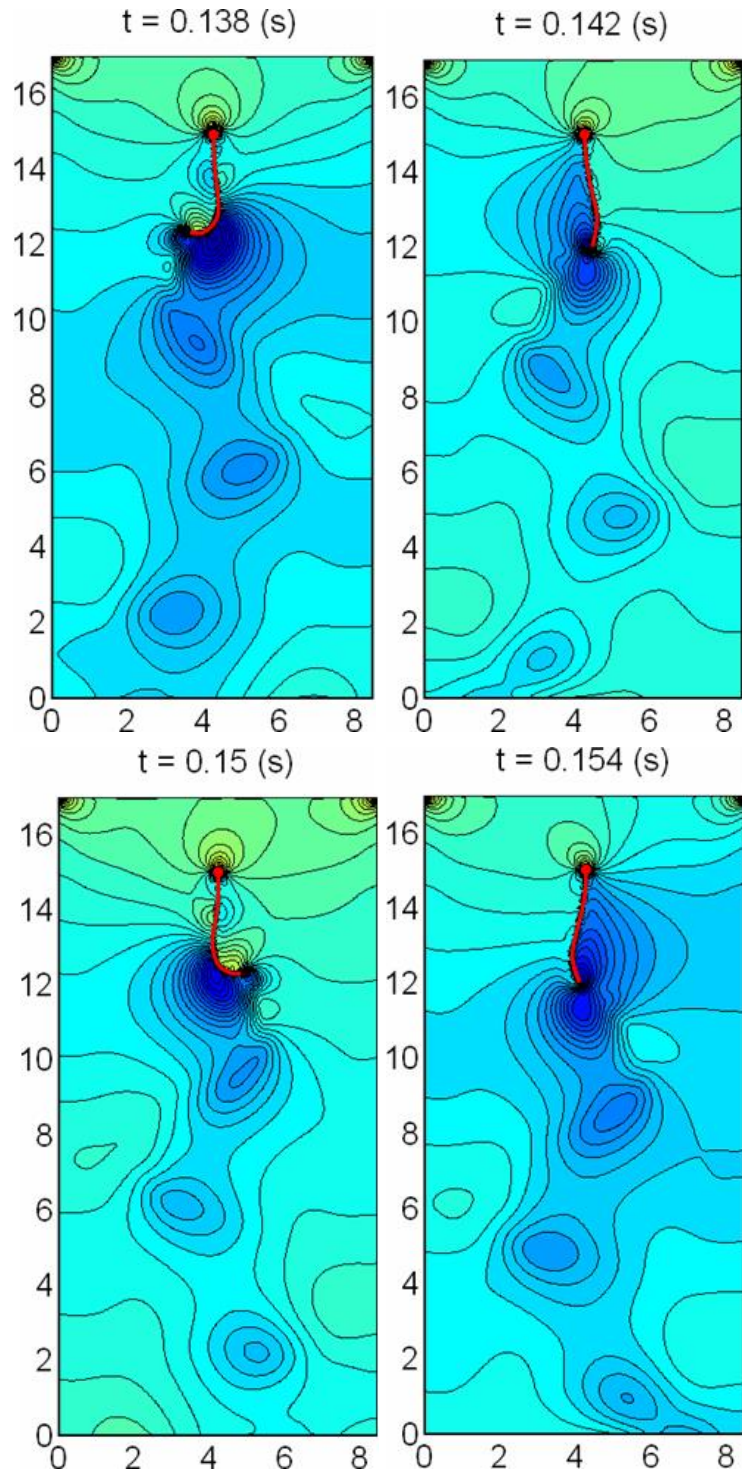
Điều kiện biên dòng chảy vào được áp đặt ở biên trên trong khi điều kiện dòng chảy ra được áp đặt ở biên dưới của miền tính toán. Biên trái và biên phải của miền tính toán được áp đặt điều kiện biên không trượt. Mô phỏng được trình bày trên lưới tính toán là 200×400 . Chúng ta sử dụng 18 điểm rời rạc để trình bày sợi đàn hồi. Bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s được sử dụng để mô phỏng bài toán. Hai kỹ thuật hiển thị khác nhau được sử dụng, đó là trường áp suất và đường bao xoáy tương ứng.



Hình 5.5: Một sợi đàn hồi không khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở thời điểm $t = 0.5$ s. Hình trái: trường áp suất; hình phải: đường bao xoáy.



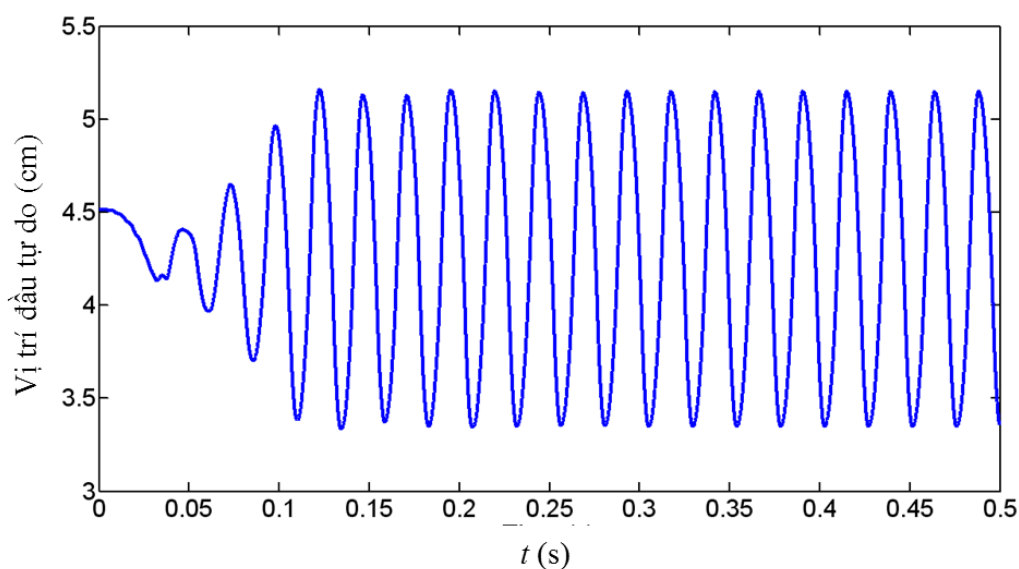
Hình 5.6: Đường bao xoáy quanh một sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau.



Hình 5.7: Trường áp suất quanh một sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau.

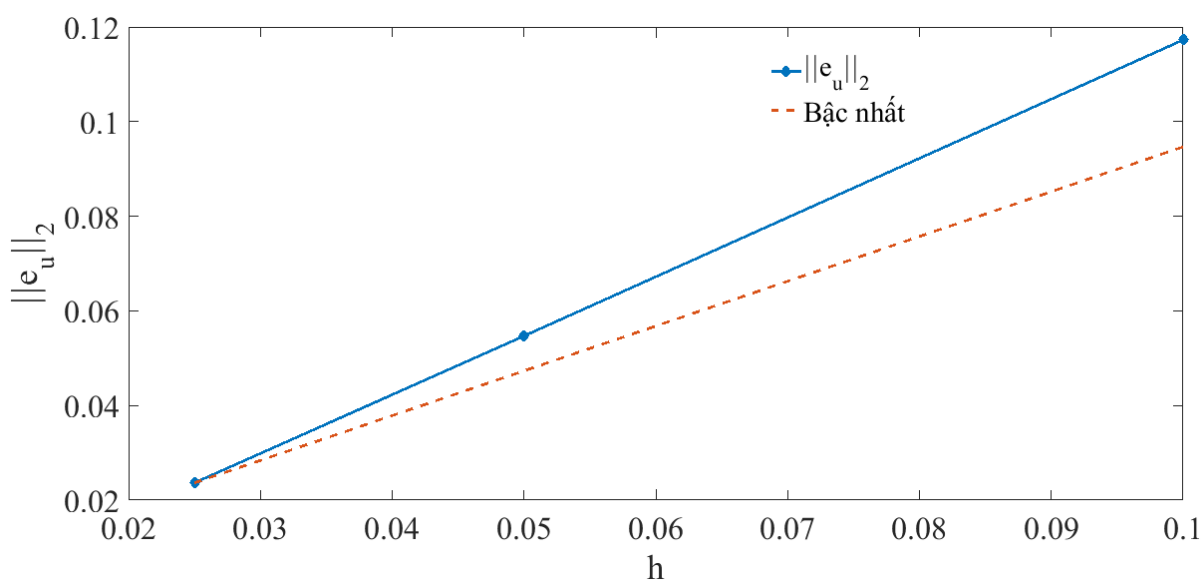
Hình 5.5 cho thấy rằng, kết quả mô phỏng của một sợi đàn hồi không khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén. Với vận tốc vào v_0 là 280 cm/s, chiều dài sợi đàn hồi là 3 cm. Vị trí ban đầu của sợi đàn hồi là tạo thành một góc 5^0 so với phương thẳng đứng. Kết quả là sợi đàn hồi trở về trạng thái nghỉ (bị kéo thẳng và cùng chiều với chiều dòng chảy) sau một vài dao động. Chúng ta thấy rằng một sợi đàn hồi không khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén không thể thực hiện dao động duy trì. Sau một vài dao động, nó sẽ luôn trở về vị trí thẳng đứng. Vì vậy trạng thái thẳng đứng là ổn định toàn cục.

Hình 5.6 và hình 5.7 trình bày trường áp suất và đường bao xoáy với thông số mô phỏng tương tự như trường hợp được trình bày trong hình 5.5, ngoại trừ trong trường hợp này sợi đàn hồi có khối lượng. Sự thay đổi theo thời gian của tọa độ theo phương x của đầu tự do sợi đàn hồi được trình bày ở hình 5.8. Từ kết quả mô phỏng chúng ta thấy tần số dao động của sợi đàn hồi khoảng 48 Hz (thấp hơn khoảng 4% với quan sát thực nghiệm [41]-50 Hz) và biên độ dao động của đầu tự do khoảng 1.6 cm (cao hơn khoảng 6.67% với quan sát thực nghiệm [41]-1.5 cm). Dao động của sợi đàn hồi được tự duy trì và tuần hoàn theo thời gian.



Hình 5.8: Tọa độ theo phương x của đầu tự do sợi đàn hồi.

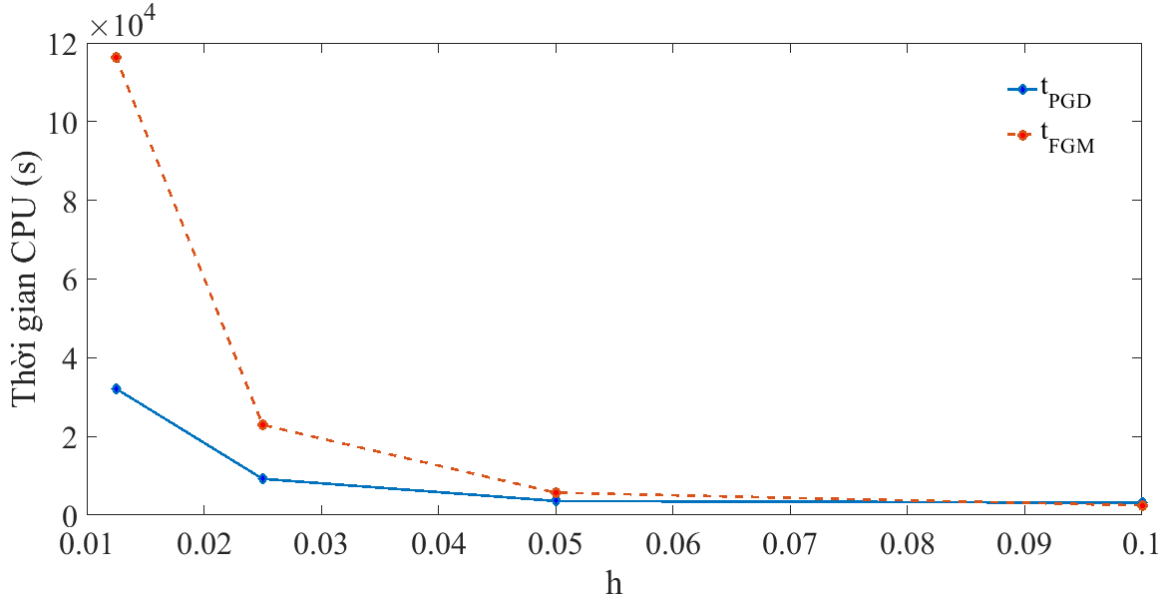
Để khảo sát ảnh hưởng của bước lưới đến độ chính xác của lời giải, chúng ta sẽ tiến hành khảo sát bài toán với các bước lưới khác nhau $h = \{ 0.10, 0.050, 0.0250 \}$. Vì bài toán không có lời giải chính xác nên chúng ta sử dụng lời giải ở bước lưới $h = 0.0125$ như lời giải tham khảo để tính toán sai số. Bài toán được khảo sát đến thời điểm $t = 0.02$ s với bước thời gian $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s để đảm bảo sự ổn định của bài toán ở các bước lưới nhỏ. Hình 5.9 trình bày các giá trị sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang $\|e_u\|_2$. Từ kết quả ở hình 5.9 cho thấy bậc hội tụ khoảng 1.15.



Hình 5.9: Sai số của thành phần vận tốc theo phương ngang ở các bước lưới khác nhau cho bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi.

Để đánh giá tốc độ tính toán của phương pháp PGD so với phương pháp sai phân hữu hạn, bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi được khảo sát đến thời điểm $t = 0.02$ s với bước thời gian $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s. Hình 5.10 trình bày thời gian tính toán ở các bước lưới khác nhau, trong đó t_{PGD} và t_{FDM} lần lượt là thời gian tính toán của phương pháp PGD và phương pháp sai phân hữu hạn. Từ kết quả ở hình 5.10 cho thấy thời gian tính toán của phương pháp PGD nhanh gấp 1.6 lần so với thời gian tính toán của phương pháp sai phân hữu hạn ở

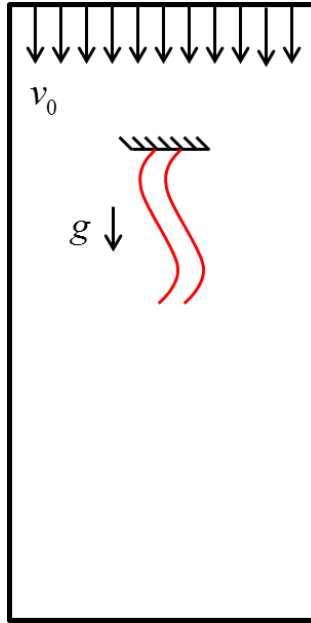
bước lưới $h = 0.05$ (170×340 điểm lưới). Tỷ lệ $t_{FDM}/t_{PGD} = 2.5$ ở số điểm lưới 340×680 ($h = 0.025$) và $t_{FDM}/t_{PGD} = 3.6$ ở số điểm lưới 680×1360 ($h = 0.0125$).



Hình 5.10: So sánh thời gian tính toán của phương pháp PGD với phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với một sợi đàn hồi.

5.6.2. Bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với hai sợi đàn hồi

Trong phần này, chúng ta sẽ mô phỏng tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với hai sợi đàn hồi như trình bày ở hình 5.11, miền tính toán và điều kiện biên tương tự như trong trường hợp một sợi đàn hồi như mô tả ở phần trên. Sự chuyển động của một sợi đàn hồi sẽ trở nên phức tạp hơn khi có một sợi đàn hồi khác ở gần do sự tương tác với xoáy sinh ra từ sợi còn lại, cũng nhưng là sự tương tác giữa hai sợi đàn hồi với nhau. Quan sát thực nghiệm [41] chỉ ra rằng, khi khoảng cách giữa hai sợi đàn hồi d là đủ nhỏ ($d/L < 0.21 \pm 0.04$, với L là chiều dài của sợi đàn hồi), thì các sợi đàn hồi sẽ dao động cùng pha với nhau, nhưng khi d đủ lớn ($d/L > 0.21$), thì chúng sẽ chuyển sang trạng thái dao động lệch pha.



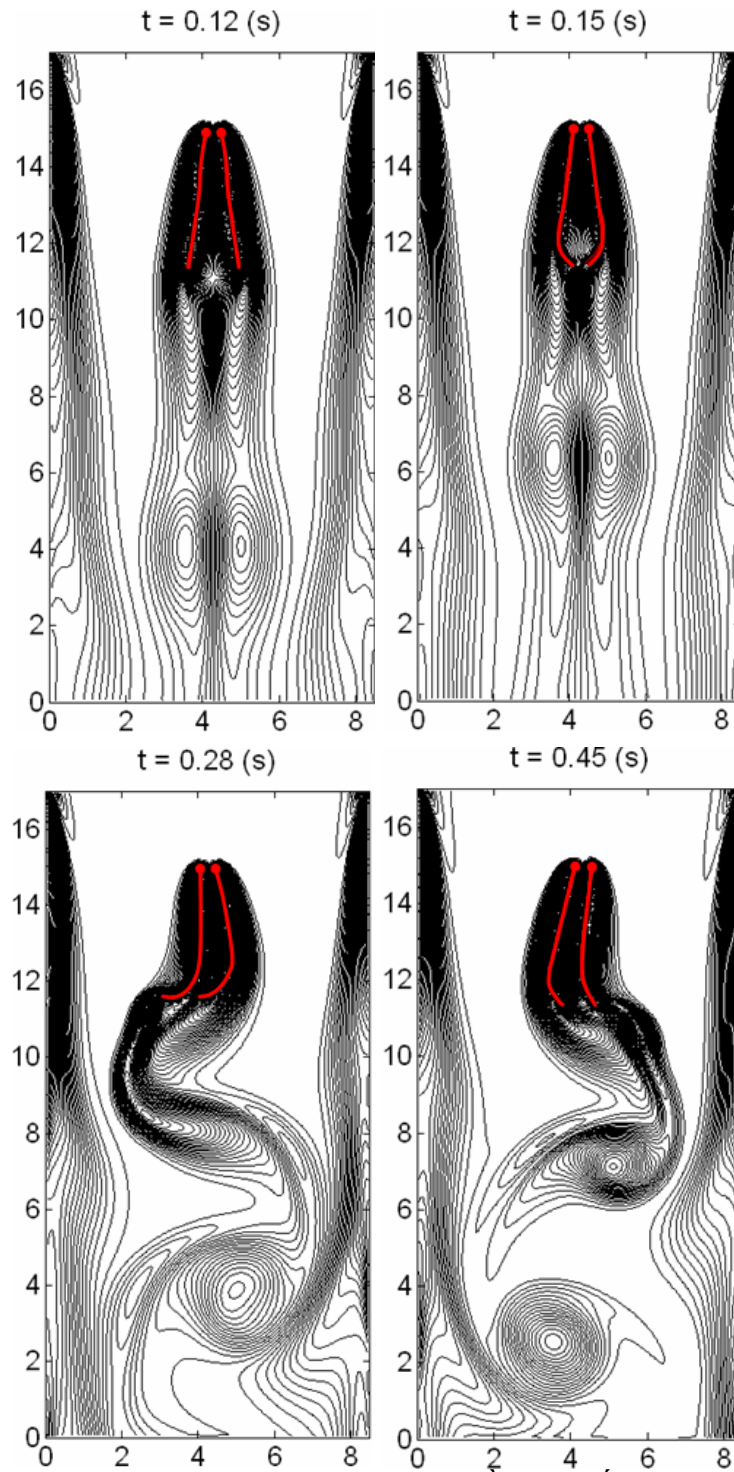
Hình 5.11: Dòng chảy nhớt không nén qua hai sợi đàn hồi.

Bảng 5.2: Thông số mô phỏng của bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với hai sợi đàn hồi.

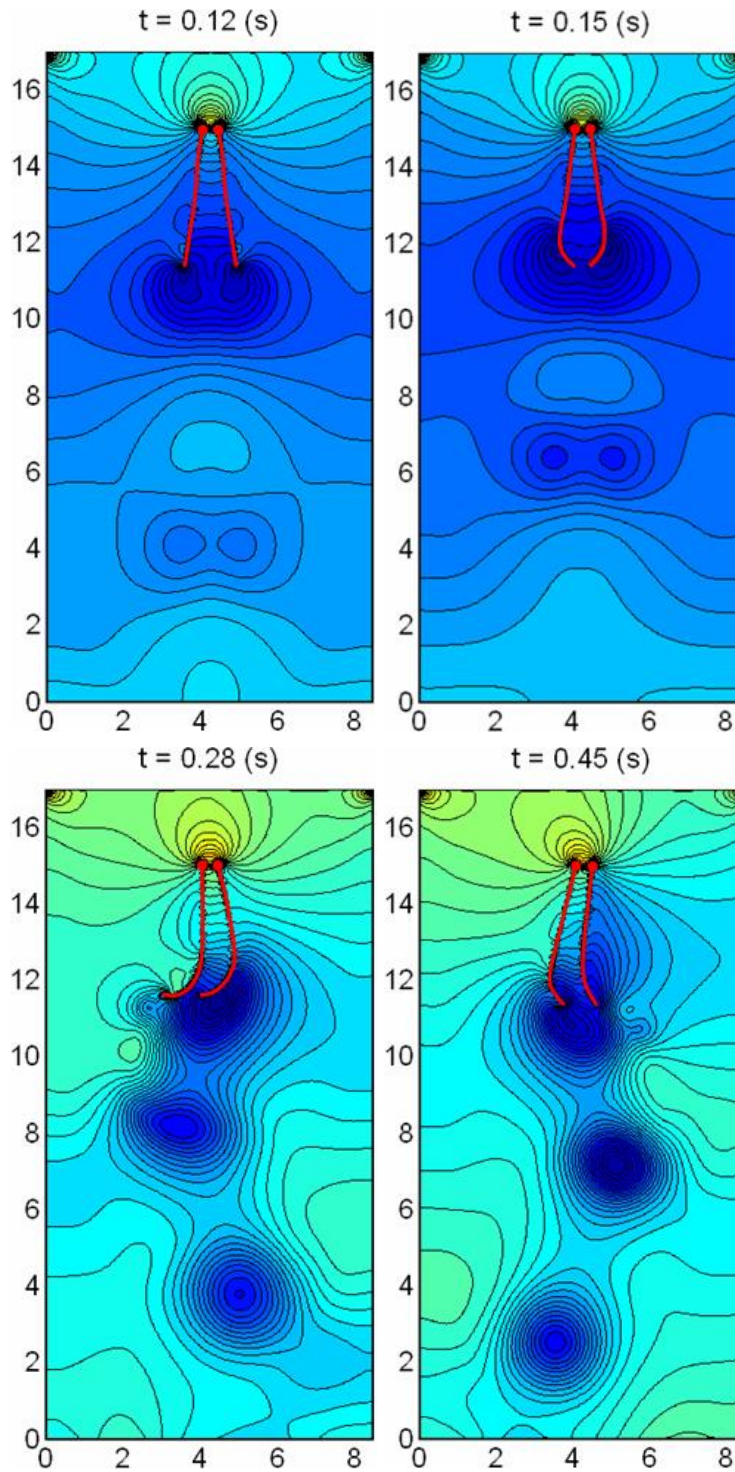
	Giá trị thực nghiệm [41]	Giá trị mô phỏng
Vận tốc dòng chảy vào (v_0)	220 cm/s	220 cm/s
Độ nhớt động lực học của lưu chất (μ)	1.2×10^{-3} g/s	1.2×10^{-3} g/s
Khối lượng riêng của lưu chất (ρ_f)	3×10^{-4} g/cm ²	3×10^{-4} g/cm ²
Chiều dày miền lưu chất	$(3-4) \times 10^{-4}$ cm	0.0 cm
Đường kính sợi đàn hồi	0.015 cm	0.0 cm
Chiều dài sợi đàn hồi (L)	3.6 cm	3.6 cm
Khối lượng riêng của sợi đàn hồi (ρ_s)	4×10^{-4} g/cm	4×10^{-4} g/cm
Độ cứng của sợi đàn hồi (κ_b)	0.1 erg.cm	0.1 erg.cm
Gia tốc trọng trường (g_y)	980 cm/s^2	980 cm/s^2
Chiều rộng miền tính toán	8.5 cm	8.5 cm
Chiều dài miền tính toán	120 cm	17 cm

Các thông số trong mô phỏng của chúng ta được trình bày trong bảng 5.2. Mô phỏng được thực hiện trên lưới 200×400 . Chúng ta sử dụng 22 điểm rời rạc để trình bày sợi đàn hồi. Bước thời gian $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s được sử dụng để mô phỏng bài toán. Khoảng cách giữa 2 sợi đàn hồi d lần lượt được chọn là $0.1L$ và $0.3L$.

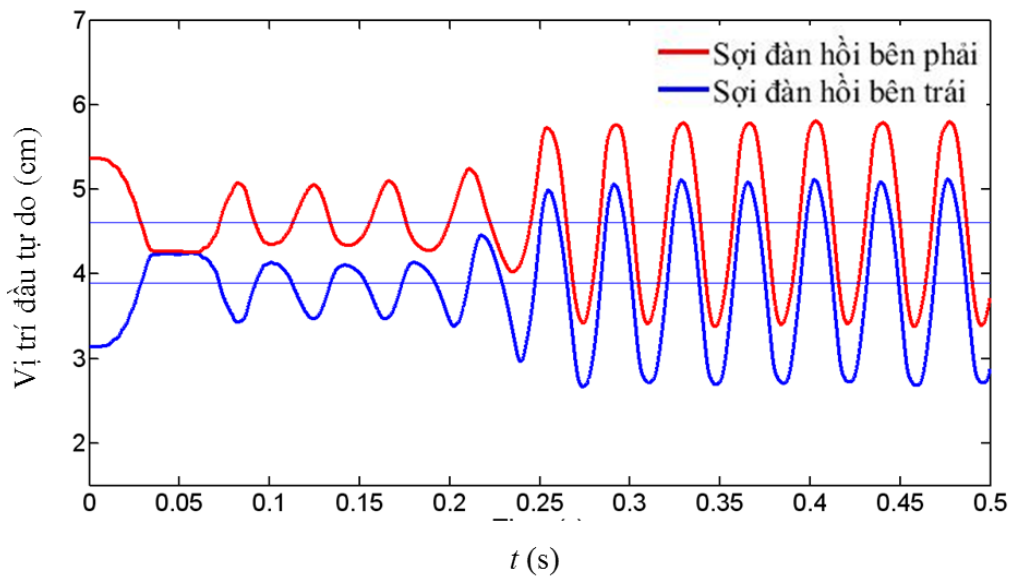
Hình 5.12 và 5.13 trình bày kết quả mô phỏng về đường bao xoáy và trường áp suất bao quanh hai sợi đàn hồi cách nhau một khoảng $d = 0.1L$. Vận tốc vào (v_0) là 220 cm/s, chiều dài sợi (L) là 3.6 cm. Vị trí ban đầu của hai sợi đàn hồi là đối xứng một góc 15° so với phương thẳng đứng (sợi bên trái tạo thành một góc -15° so với phương thẳng đứng, trong khi sợi bên phải tạo một góc $+15^\circ$ so với phương thẳng đứng). Kết quả mô phỏng cho thấy rằng dao động của hai sợi đàn hồi (bắt đầu từ vị trí ban đầu và sau xấp xỉ một dao động) là đồng pha. Trong mỗi chu kỳ, xoáy được tỏa ra từ hai đầu tự do với chiều luân phiên, sợi phía bên trái tạo ra xoáy ngược chiều kim đồng hồ, trong khi sợi bên phải tạo xoáy cùng chiều kim đồng hồ. Dao động song song tự duy trì liên tục và tuần hoàn theo thời gian. Hình 5.14 trình bày tọa độ theo phương x của đầu tự do mỗi sợi đàn hồi như là một hàm của thời gian. Tần số dao động của đầu tự do sợi đàn hồi khoảng 25Hz, kết quả này có sự tương đồng tốt với kết quả của Zhu và Peskin [141] (29 Hz). Dao động của các sợi đàn hồi là lệch pha trong suốt giai đoạn ban đầu nhưng có sự thay đổi từ từ và chuyển sang trạng thái dao động đồng pha ở khoảng thời gian $t = 0.27$ s.



Hình 5.12: Đường bao xoáy quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau với $d = 0.1L$.

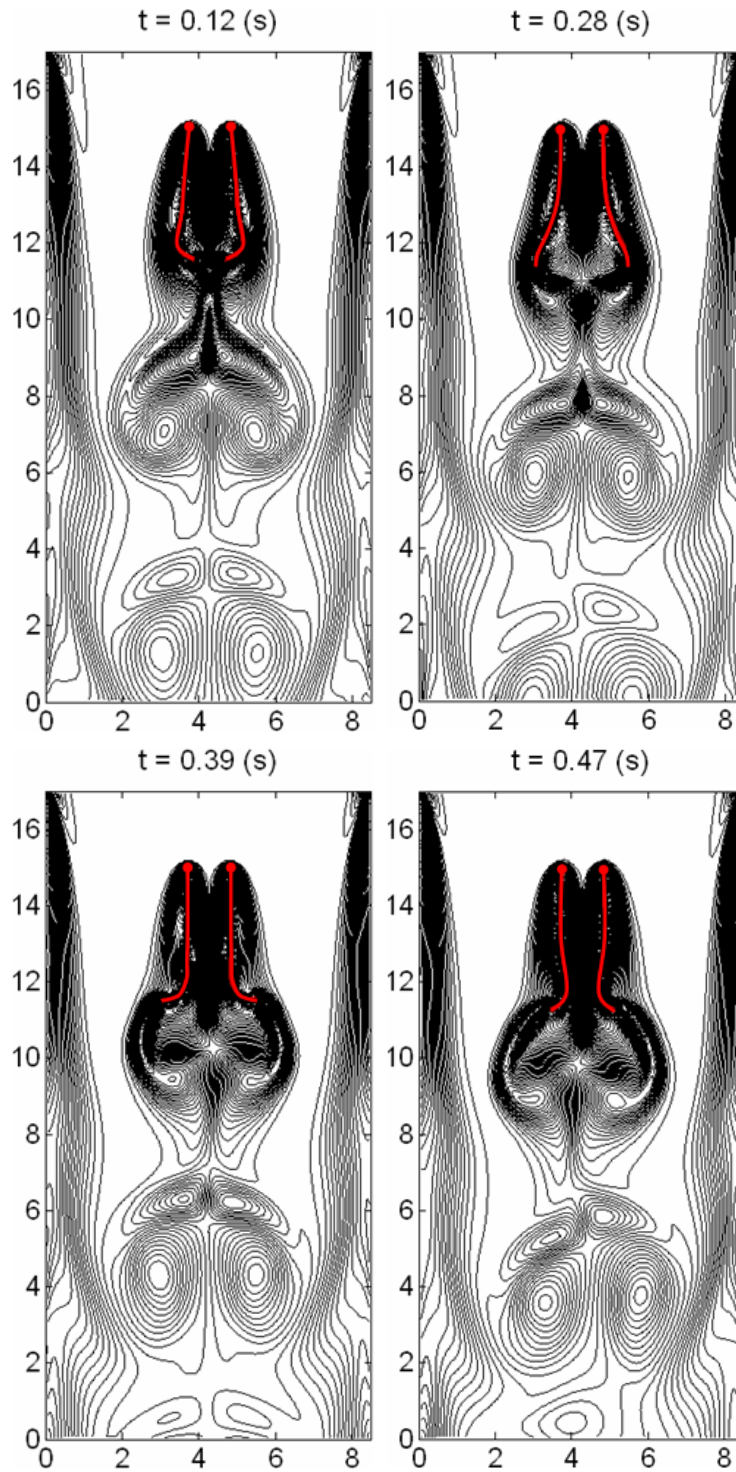


Hình 5.13: Trường áp suất quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau với $d = 0.1L$.

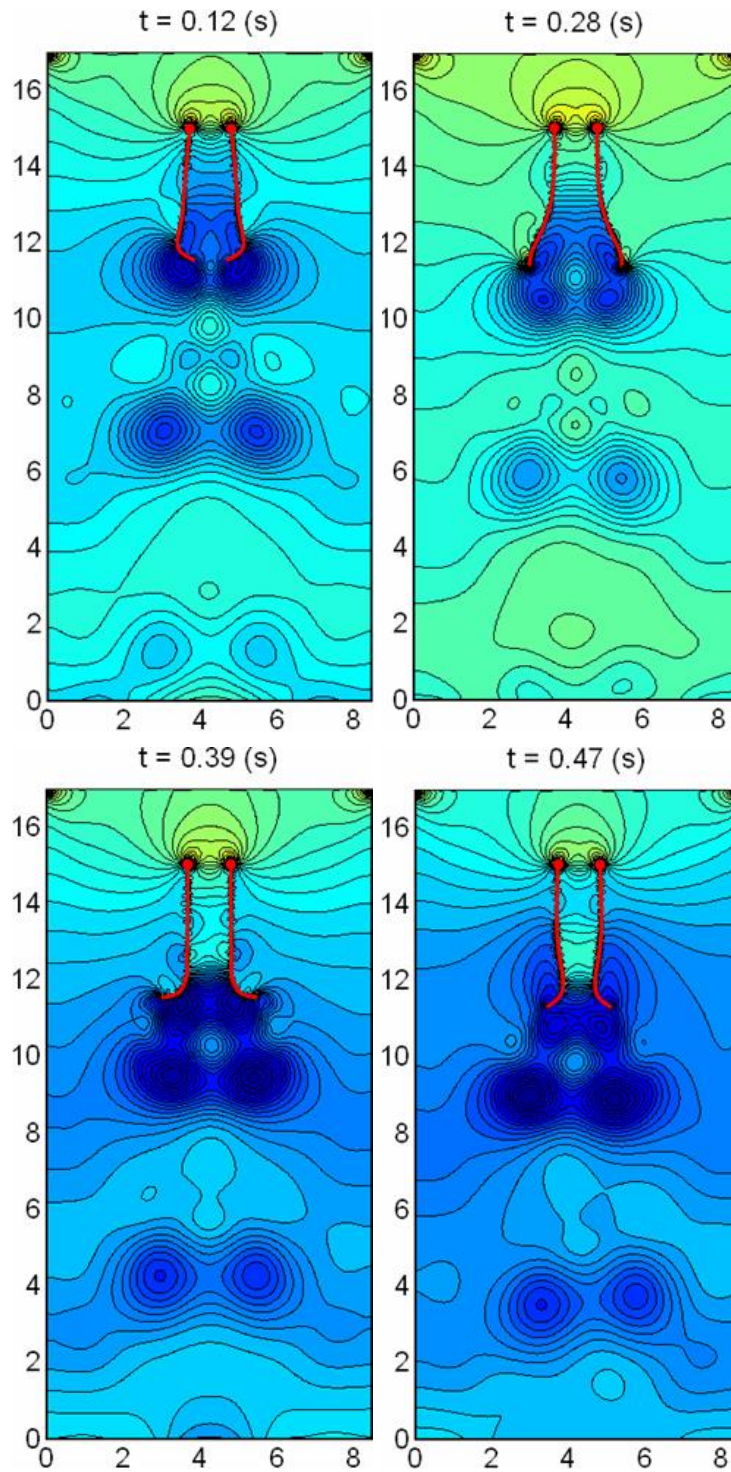


Hình 5.14: Tọa độ đầu tự do theo phương x của hai sợi đàn hồi như một hàm theo thời gian với $d = 0.1L$.

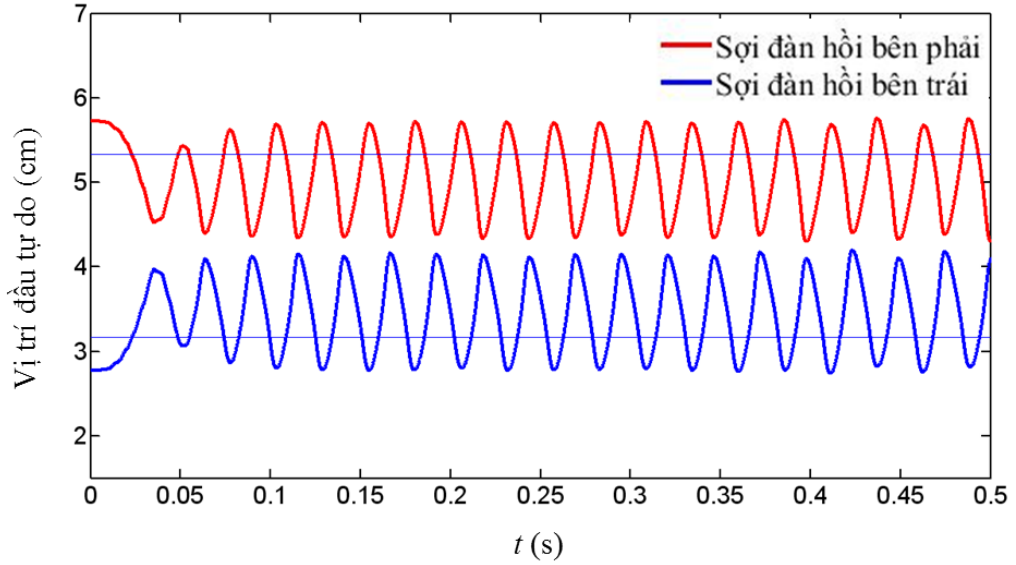
Với $d = 0.3L$ (tất cả các thông số mô phỏng được giữ nguyên như trường hợp $d = 0.1L$), dao động của hai sợi là ngược pha và các xoáy lan tỏa từ các sợi là đối xứng như hình 5.15 và hình 5.16. Các sợi thiết lập trạng thái dao động ngược pha ổn định. Khi hai đầu tự do của sợi đạt đến biên độ cực đại thì các xoáy có dấu ngược nhau (sợi bên trái tạo xoáy ngược chiều kim đồng hồ trong khi sợi bên phải tạo xoáy cùng chiều kim đồng hồ). Hình 5.17 trình bày tọa độ theo phương x của hai đầu tự do như một hàm theo thời gian. Tần số dao động là khoảng 38Hz, cao hơn 35% tần số dao động trong trường hợp đồng pha. Kết quả về tần số dao động đạt được ở trường hợp này có sự đồng thuận khá tốt với kết quả của Zhu & Peskin [141] (41 Hz).



Hình 5.15: Đường bao xoáy quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau với $d = 0.3L$.



Hình 5.16: Trường áp suất quanh hai sợi đàn hồi có khối lượng trong dòng chảy nhớt không nén ở các thời điểm khác nhau với $d = 0.3L$.



Hình 5.17: Tọa độ đầu tự do theo phương x của hai sợi đàn hồi như một hàm theo thời gian với $d = 0.3L$.

5.6.3. Bài toán sợi đàn hồi khép kín trong miền lưu chất tĩnh

Trong phần này, chúng ta sẽ xét một bài toán tương tác rắn – lỏng khác, một màng đàn hồi khép kín bị kéo căng nhưng không giãn trong một miền lưu chất nhớt không nén được. Trạng thái ban đầu của sợi đàn hồi là một elip với bán kính lớn là $a = 0.4$ và bán kính nhỏ $b = 0.2$. Elip được định vị ở tâm của miền tính toán. Giả sử lực gây ra bởi màng đàn hồi tại điểm $\mathbf{X}(s, t)$ chỉ là lực đàn hồi và được cho như sau

$$\mathbf{f}(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} (T(s, t) \boldsymbol{\tau}(s, t)) \quad (5.52)$$

ở đây $T(s, t)$ là ứng suất của sợi đàn, được định nghĩa bởi công thức sau

$$T(s, t) = \sigma \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial s} \right| - 1 \right) \quad (5.53)$$

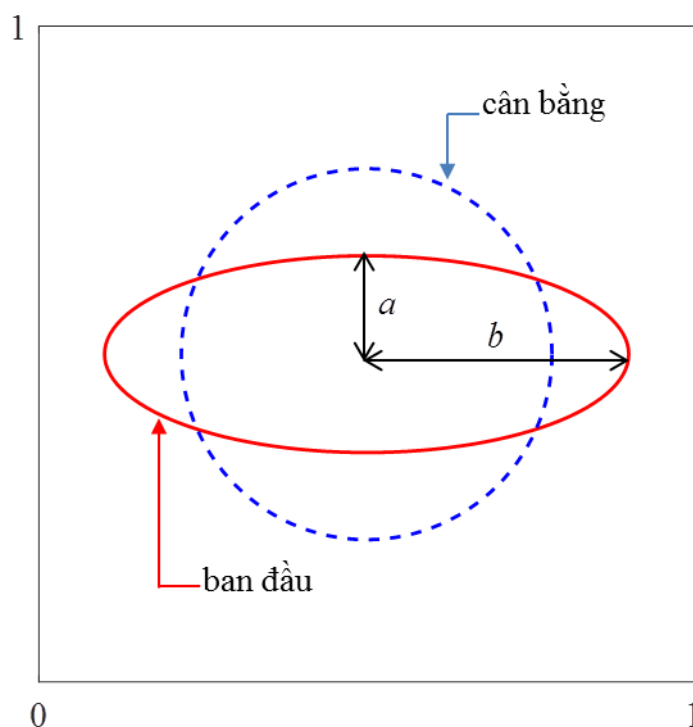
và $\boldsymbol{\tau}(s, t)$ là véc tơ tiếp tuyến đơn vị với mặt phân cách tại điểm này

$$\boldsymbol{\tau}(s, t) = \frac{\partial \mathbf{X} / \partial s}{\left| \partial \mathbf{X} / \partial s \right|} \quad (5.54)$$

Bởi vì điều kiện không nén, chúng ta mong đợi rằng màng đàn hồi sẽ dẫn ra đến trạng thái cân bằng với bán kính $r = \sqrt{ab} \approx 0.2828$. Chúng ta bắt đầu mô phỏng bằng cách đặt trường vận tốc và áp suất ban đầu đều bằng không. Miền tính toán là $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Vị trí ban đầu của màng đàn hồi được cho như sau

$$\mathbf{X}(s, 0) = \left(\frac{1}{2} + a \cos(2\pi s), \frac{1}{2} + b \sin(2\pi s) \right) \quad (5.55)$$

Các thông số mô phỏng của bài toán được cho như sau $\mu = 1$, $\rho = 1$ và hằng số lò xo của màng đàn hồi $\kappa_s = 10000$. Bài toán sử dụng 64×64 điểm lưới để rời rạc miền lưu chất và 192 điểm lưới để rời rạc sợi đàn hồi, bước thời gian sử dụng trong mô phỏng là $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ s.



Hình 5.18: Cấu trúc ban đầu và trạng thái cân bằng của sợi đàn hồi khép kín.

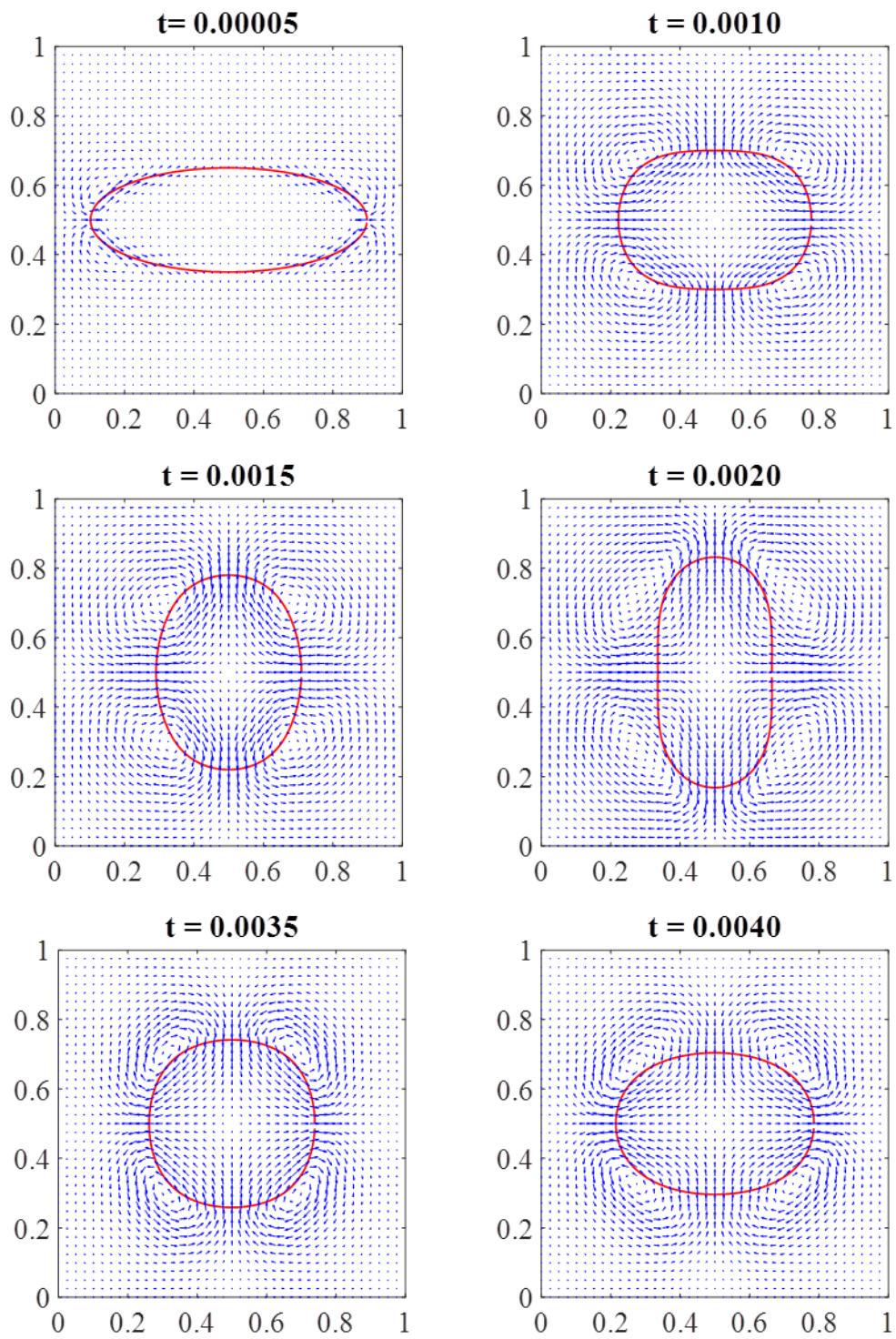
Hình 5.19 trình bày trường vận tốc và sự phát triển của hệ ở các bước thời gian đầu tiên và $t = 0.0010, 0.0015, 0.0020, 0.0035, 0.0045$. Từ hình vẽ, chúng ta

thấy rằng sự chuyển động hồi phục của sợi đàn hồi khép kín gây ra một dòng chảy dao động với các xoáy ở các góc chéo. Các kết quả này có sự thống nhất với các kết quả tham khảo khác [142, 143].

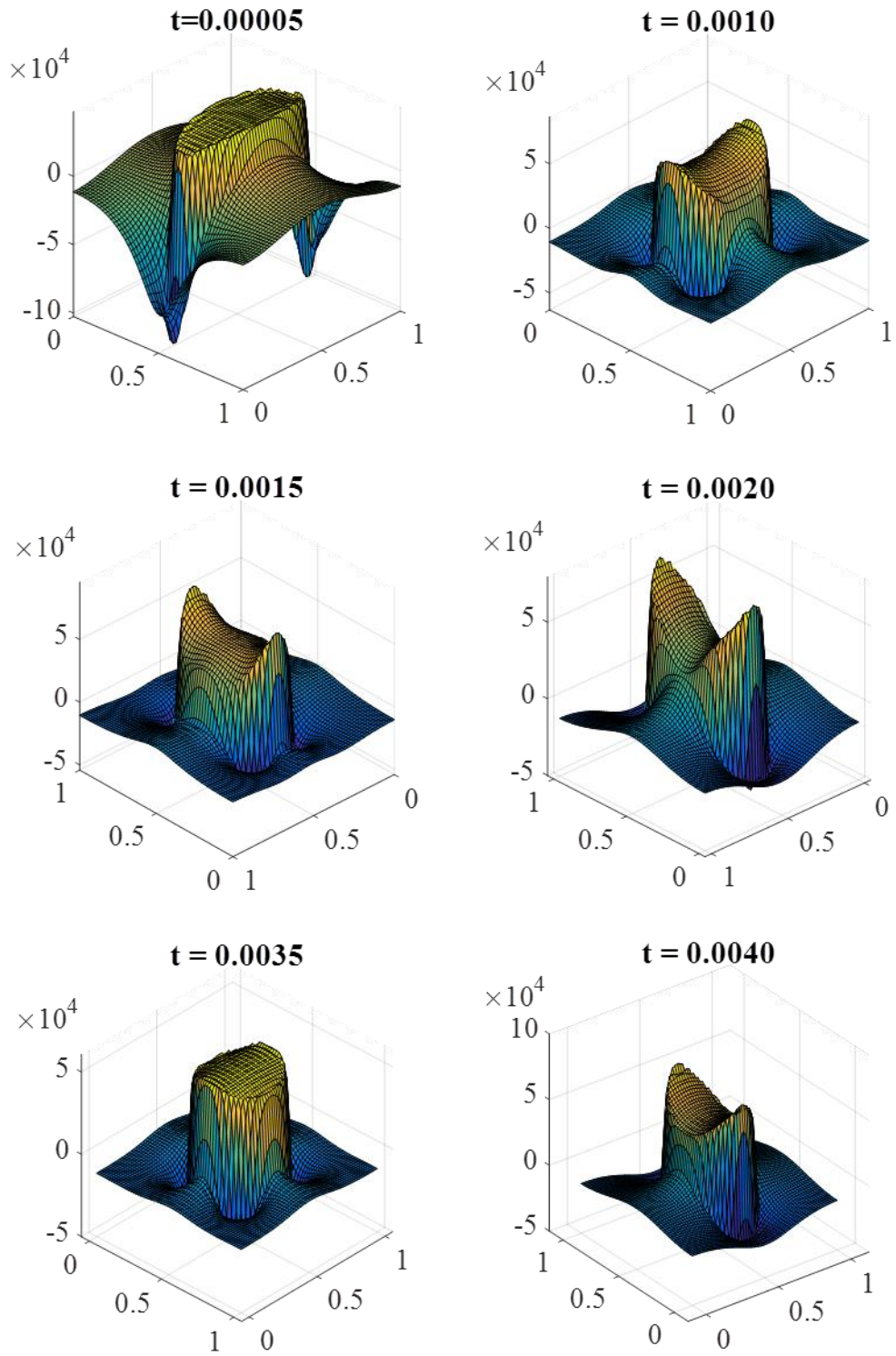
Hình 5.20 trình bày sự phân bố áp suất ở các thời điểm khác nhau. Có thể thấy rằng lực co của biên tạo ra một áp suất nhảy đứng bên trong và bên ngoài sợi đàn hồi (khép kín). Các kết quả từ hình vẽ cho thấy sự đồng thuận rất tốt với các báo cáo trong các tài liệu tham khảo. Bảng 5.3 so sánh sự mất mát diện tích tính toán của phương pháp được đề xuất ở thời điểm $t = 0.020$ s. Từ kết quả so sánh cho thấy sự đồng thuận rất tốt của phương pháp đề xuất với các kết quả tham khảo [144, 145].

Bảng 5.3: So sánh sự mất mát diện tích tính toán của sợi đàn hồi khép kín ở thời điểm $t = 0.020$ s.

Tác giả	Số điểm lưới lưu chất $n_x \times n_y$	Số điểm rời rạc màng đàn hồi n_b	Diện tích tính toán A	Diện tích mất mát %
Stockie và cộng sự [144]	64×64	192	-	4.4
Stockie [145]	64×64	192	-	7.6
Luận án	64×64	192	0.2401	4.7



Hình 5.19: Trường vận tốc và biên dạng của sợi đàn hồi ở các thời điểm khác nhau.



Hình 5.20: Phân bố áp suất xung quanh sợi đàn hồi ở các thời điểm khác nhau.

5.7. Kết luận

Trong chương này đã đề xuất việc kết hợp giữa phương pháp IB với phương pháp PGD để giải các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi. Dưới đây là một số kết quả đạt được ở chương này:

- Xây dựng giải thuật kết hợp giữa phương pháp IB với phương pháp PGD trong việc giải các bài toán tương tác giữa lưu chất với vật cản biên đàn hồi.
- Áp dụng phương pháp đề xuất trong việc mô phỏng các bài toán như: bài toán tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén qua một sợi đàn hồi, tương tác giữa dòng chảy với hai sợi đàn hồi và bài toán sợi đàn hồi khép kín trong miền lưu tĩnh. Từ đó, cho thấy khả năng áp dụng của phương pháp đề xuất có thể áp dụng với nhiều bài toán khác nhau.
- Các kết quả mô phỏng được trình bày và so sánh với các kết quả trong các công bố khoa học trước. Từ đó, cho thấy sự đồng thuận rất tốt của kết quả đề xuất với các kết quả tham khảo khác.
- Các kết quả khảo sát về sai số của phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD cho bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi được thực hiện. Kết quả cho thấy sai số của bài toán tương tác giữa dòng chảy với một sợi đàn hồi có bậc hội tụ khoảng 1.15.
- So sánh về thời gian tính toán của phương pháp PGD so với phương pháp sai phân hữu hạn được thực hiện với bài toán dòng chảy nhớt không nén tương tác với một sợi đàn hồi. Từ kết quả so sánh cho thấy thời gian tính toán của phương pháp PGD có ưu thế rất tốt so với phương pháp sai phân hữu hạn, tỉ lệ $t_{FDM}/t_{PGD} = 2.5$ ở 340×680 điểm lưới và $t_{FDM}/t_{PGD} = 3.6$ ở 680×1360 điểm lưới.

Các công bố khoa học được thực hiện từ chương này:

1. **Cuong Q. Le**, H. Phan-Duc, Son H. Nguyen, “Immersed Boundary Method Combined With Proper Generalized Decomposition For Simulation Of A

Flexible Filament In A Viscous Incompressible Flow,” *Vietnam Journal of Mechanics*, 2017 (2), 109-119, ISSN: 0866-7136.

2. **Lê Quốc Cường**, Nguyễn Hoài Sơn, Phan Đức Huỳnh, “Mô phỏng số tương tác giữa dòng chảy nhớt không nén với sợi đàn hồi bằng phương pháp Proper Generalized Decomposition kết hợp với phương pháp biên nhúng,” *Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc*, 2015, 35-44, ISBN: 978-604-84-1272-2.

Chương 6

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

6.1. Kết luận

Thông qua các kết quả đạt được trong suốt quá trình nghiên cứu, luận án rút ra một số kết luận như sau:

- Luận án đã áp dụng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn để giải các phương trình vi phân đạo hàm riêng bậc cao trong không gian hai chiều và không gian ba chiều, đặc biệt với phương trình Biharmonic trong không gian ba chiều đã được giải bằng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn với sai số đạt được là 1.44×10^{-9} với số điểm lưới trên mỗi chiều $n = 64$ nhưng chỉ với thời gian giải $t = 0.156$ s. Các kết quả tính toán cho thấy sự vượt trội về tốc độ tính toán của phương pháp PGD với các kết quả tham khảo.
- Luận án đã đề xuất giải thuật và giải các bài toán về dòng chảy nhớt không nén ở các điều kiện biên và miền vật lý khác nhau bằng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn. Với bài toán Lid-driven cavity, các kết quả về hình dạng của đường dòng, xoáy và tọa độ của tâm xoáy trung tâm ở các hệ số Reynolds khác nhau cho thấy sự đồng thuận khá tốt với các kết quả tham khảo. Ở bài toán Backward-facing step, các kết quả về đường dòng và chiều dài vùng xoáy cũng cho thấy sự tương đồng với các kết quả khảo đã công bố. Các kết quả khảo sát về sai số cho thấy bậc hội tụ của phương pháp đề xuất có bậc cao hơn bậc nhất. Thời gian tính toán của phương pháp PGD so với phương pháp sai phân hữu hạn cũng được khảo sát với bài toán Lid-driven cavity, kết quả cho thấy lời giải PGD có thời gian vượt

trội hơn so với phương pháp sai phân hữu hạn ($t_{FDM} / t_{PGD} = 3.1$ với 640×640 điểm lưới).

- Luận án đã đề xuất kết hợp phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD để giải quyết các bài toán tương tác giữa lưu chất với vật cản biên cứng đứng yên và di chuyển. Các bài toán minh họa về dòng chảy nhớt không nén qua trụ tròn đứng yên và trụ tròn di chuyển ở các điều kiện biên và hệ số Reynolds khác nhau đã được mô phỏng. Các kết quả mô phỏng cho thấy sự đồng thuận khá tốt của phương pháp đề xuất với các kết quả tham khảo. Đánh giá sai số của phương pháp đề xuất cũng được thực hiện ở bài toán Backward-facing step flow với trụ tròn ở tâm của miền tính toán và bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định. Sai số của bài toán Backward-facing step flow với trụ tròn ở tâm của miền tính toán có bậc hội tụ là 1.32, trong khi đó sai số của bài toán dòng chảy qua một trụ tròn cố định có bậc hội tụ là 1.36.
- Luận án đã đề xuất kết hợp phương pháp IB và phương pháp PGD để giải quyết các bài toán dòng chảy nhớt không nén qua vật cản biên đàn hồi. Các kết quả khảo sát về dòng chảy và sợi đàn hồi được trình bày và so sánh với các kết quả nghiên cứu cho thấy sự đồng thuận rất tốt của phương pháp mà luận án đã đề xuất. Sai số của phương pháp đề xuất được khảo sát với bài toán dòng chảy nhớt không nén qua một sợi đàn hồi, kết quả cho thấy sai số có bậc hội tụ là 1.15. Thời gian tính toán của phương pháp PGD và phương pháp sai phân hữu hạn cũng được khảo sát trong trường hợp bài toán dòng chảy nhớt không nén qua một sợi đàn hồi, kết quả cho thấy ưu điểm về thời gian tính toán của phương pháp PGD so với phương pháp sai phân hữu hạn, tỉ lệ $t_{FDM} / t_{PGD} = 2.5$ ở 340×680 điểm lưới và $t_{FDM} / t_{PGD} = 3.6$ ở 680×1360 điểm lưới.
- Từ các kết quả đã phân tích, luận án cho thấy tính khả thi và hiệu quả khi áp dụng phương pháp biên nhúng kết hợp với phương pháp PGD để

giải quyết nhiều dạng bài toán FSI khác nhau trong cả trường hợp dòng chảy nhớt không nén qua vật cản có biên đứng yên và biên di chuyển.

6.2. Kiến nghị

Trong suốt quá trình nghiên cứu, luận án đã gặp phải một số khó khăn và còn tồn tại những hạn chế nhất định. Sau đây là một số hướng nghiên cứu mở rộng của luận án trong thời gian sắp tới:

- Nghiên cứu phát triển phương pháp PGD để xử lý các bài toán với điều kiện biên phức tạp hơn.
- Mở rộng phương pháp đề xuất cho các bài toán FSI phức tạp hơn như: kết hợp quá trình truyền nhiệt, các bài toán tương tự trong trường hợp dòng chảy nhớt nén được, hoặc các bài toán tương tự với dòng chảy rối.
- Mở rộng áp dụng phương pháp đề xuất cho các bài toán tương tác rắn-lỏng trong không gian ba chiều.
- Mở rộng việc kết hợp phương pháp PGD với các phương pháp số khác như: đẳng hình học, phần tử hữu hạn, radial basis function, ... để tìm kiếm lời giải hiệu quả.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A. Jain, P. Jones Nicholas, and H. Scanlan Robert, "Coupled Flutter and Buffeting Analysis of Long-Span Bridges," *Journal of Structural Engineering*, vol. 122, pp. 716-725, 1996/07/01 1996.
- [2] X. Chen, A. Kareem, and M. Matsumoto, "Multimode coupled flutter and buffeting analysis of long span bridges," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 89, pp. 649-664, 2001/06/01/ 2001.
- [3] J. Arrigan, V. Pakrashi, B. Basu, and S. Nagarajaiah, "Control of flapwise vibrations in wind turbine blades using semi-active tuned mass dampers," *Structural Control and Health Monitoring*, vol. 18, pp. 840-851, 2011/12/01 2011.
- [4] A. Kumar, A. Dwivedi, V. Paliwal, and P. P. Patil, "Free Vibration Analysis of A1 2024 Wind Turbine Blade Designed for Uttarakhand Region based on FEA," *Procedia Technology*, vol. 14, pp. 336-347, 2014/01/01/ 2014.
- [5] W. Y. Liu, "The vibration analysis of wind turbine blade–cabin–tower coupling system," *Engineering Structures*, vol. 56, pp. 954-957, 2013/11/01/ 2013.
- [6] N. Yang Jann, K. Agrawal Anil, B. Samali, and J.-C. Wu, "Benchmark Problem for Response Control of Wind-Excited Tall Buildings," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 130, pp. 437-446, 2004/04/01 2004.
- [7] L. Ierimonti, L. Caracoglia, I. Venanzi, and A. L. Materazzi, "Investigation on life-cycle damage cost of wind-excited tall buildings considering directionality effects," *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 171, pp. 207-218, 2017/12/01/ 2017.
- [8] C. Farhat, K. G. van der Zee, and P. Geuzaine, "Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational

- aeroelasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 1973-2001, 2006/03/15/ 2006.
- [9] E. de Langre, "Effects of Wind on Plants," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 40, pp. 141-168, 2008/01/01 2008.
- [10] I. Borazjani, L. Ge, and F. Sotiropoulos, "High-resolution fluid-structure interaction simulations of flow through a bi-leaflet mechanical heart valve in an anatomic aorta," *Annals of biomedical engineering*, vol. 38, pp. 326-344, 2010.
- [11] F. Sotiropoulos and I. Borazjani, "A review of state-of-the-art numerical methods for simulating flow through mechanical heart valves," *Medical & Biological Engineering & Computing*, vol. 47, pp. 245-256, 2009/03/01 2009.
- [12] S. Kern and P. Koumoutsakos, "Simulations of optimized anguilliform swimming," *Journal of Experimental Biology*, vol. 209, p. 4841, 2006.
- [13] I. Borazjani and F. Sotiropoulos, "Numerical investigation of the hydrodynamics of anguilliform swimming in the transitional and inertial flow regimes," *Journal of Experimental Biology*, vol. 212, p. 576, 2009.
- [14] M. Heil, "An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid–structure interaction problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 1-23, 2004/01/02/ 2004.
- [15] K.-J. Bathe and H. Zhang, "Finite element developments for general fluid flows with structural interactions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, pp. 213-232, 2004/05/07 2004.
- [16] J. Hron and S. Turek, "A Monolithic FEM/Multigrid Solver for an ALE Formulation of Fluid-Structure Interaction with Applications in Biomechanics," in *Fluid-Structure Interaction*, Berlin, Heidelberg, 2006, pp. 146-170.
- [17] P. J. Atzberger, "Stochastic Eulerian Lagrangian methods for fluid–structure interactions with thermal fluctuations," *Journal of Computational Physics*, vol. 230, pp. 2821-2837, 2011/04/20/ 2011.

- [18] P. J. Atzberger, "Incorporating shear into stochastic Eulerian–Lagrangian methods for rheological studies of complex fluids and soft materials," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 265, pp. 57-70, 2013/12/15/ 2013.
- [19] T. Rabczuk, R. Gracie, J.-H. Song, and T. Belytschko, "Immersed particle method for fluid–structure interaction," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, pp. 48-71, 2010/01/01 2009.
- [20] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, T. Rabczuk, H. Nguyen-Xuan, and C. Le-Van, "AN APPLICATION OF THE ES-FEM IN SOLID DOMAIN FOR DYNAMIC ANALYSIS OF 2D FLUID–SOLID INTERACTION PROBLEMS," *International Journal of Computational Methods*, vol. 10, p. 1340003, 2013/02/01 2013.
- [21] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, S. Nguyen-Hoang, and Q. Lieu-Xuan, "A smoothed coupled NS/nES-FEM for dynamic analysis of 2D fluid–solid interaction problems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 232, pp. 324-346, 2014/04/01/ 2014.
- [22] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, S. Nguyen-Hoang, and Q. Lieu-Xuan, "A coupled alpha-FEM for dynamic analyses of 2D fluid–solid interaction problems," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 271, pp. 130-149, 2014/12/01/ 2014.
- [23] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, V. Ho-Huu, and L. Le-Anh, "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for dynamic analysis of 2D Fluid-Solid interaction problems," *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 19, pp. 641-650, 2015/03/01 2015.
- [24] M. Benamour, E. Liberge, and C. Beghein, "A new approach using lattice Boltzmann method to simulate fluid structure interaction," *Energy Procedia*, vol. 139, pp. 481-486, 2017/12/01/ 2017.

- [25] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings, "A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids," *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 139, pp. 153-176, 2006/12/15/ 2006.
- [26] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings, "A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids: Part II: Transient simulation using space-time separated representations," *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 144, pp. 98-121, 2007/07/20/ 2007.
- [27] C. Le-Quoc, L. A. Le, V. Ho-Huu, P. D. Huynh, and T. Nguyen-Thoi, "An Immersed Boundary Proper Generalized Decomposition (IB-PGD) for Fluid-Structure Interaction Problems," *International Journal of Computational Methods*, vol. 15, p. 1850045, 2018/09/01 2017.
- [28] C. Q. Le, H. Phan-Duc, and S. H. Nguyen, "Immersed boundary method combined with proper generalized decomposition for simulation of a flexible filament in a viscous incompressible flow," *Vietnam Journal of Mechanics; Vol 39, No 2 (2017)*, 2017.
- [29] C. S. Peskin, "Numerical analysis of blood flow in the heart," *Journal of Computational Physics*, vol. 25, pp. 220-252, 1977/11/01/ 1977.
- [30] D. Kim and H. Choi, "Immersed boundary method for flow around an arbitrarily moving body," *Journal of Computational Physics*, vol. 212, pp. 662-680, 2006/03/01/ 2006.
- [31] L. A. Miller and C. S. Peskin, "Flexible clap and fling in tiny insect flight," *Journal of Experimental Biology*, vol. 212, p. 3076, 2009.
- [32] D. Pan, J. Deng, X. Shao, and Z. Liu, "On the Propulsive Performance of Tandem Flapping Wings with a Modified Immersed Boundary Method,"

International Journal of Computational Methods, vol. 13, p. 1650025, 2016/10/01 2016.

[33] K. Shoele and Q. Zhu, "Flow-induced vibrations of a deformable ring," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 650, pp. 343-362, 2010.

[34] C. A. Saleel, A. Shaija, and S. Jayaraj, "COMPUTATIONAL SIMULATION OF FLUID FLOW OVER A TRIANGULAR STEP USING IMMERSED BOUNDARY METHOD," *International Journal of Computational Methods*, vol. 10, p. 1350016, 2013/08/01 2013.

[35] S. M. Dash, T. S. Lee, and H. Huang, "Particle Sedimentation in a Constricted Passage Using a Flexible Forcing IB-LBM Scheme," *International Journal of Computational Methods*, vol. 12, p. 1350095, 2015/02/01 2014.

[36] L. T. Zhang, "Immersed Methods for High Reynolds Number Fluid-Structure Interactions," *International Journal of Computational Methods*, vol. 14, p. 1750068, 2017/12/01 2017.

[37] L. Zhu and C. S. Peskin, "Simulation of a Flapping Flexible Filament in a Flowing Soap Film by the Immersed Boundary Method," *Journal of Computational Physics*, vol. 179, pp. 452-468, 2002/07/01/ 2002.

[38] L. A. Miller and C. S. Peskin, "A computational fluid dynamics of 'clap and fling' in the smallest insects," *Journal of Experimental Biology*, vol. 208, p. 195, 2005.

[39] "Large eddy simulation and zonal modeling of human-induced contaminant transport," *Indoor Air*, vol. 18, pp. 233-249, 2008/06/01 2008.

[40] F. Roman, V. Armenio, and J. Fröhlich, "A simple wall-layer model for large eddy simulation with immersed boundary method," *Physics of Fluids*, vol. 21, p. 101701, 2009/10/01 2009.

[41] L. Zhu, "Interaction of two tandem deformable bodies in a viscous incompressible flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 635, pp. 455-475, 2009.

- [42] G. Iaccarino and R. Verzicco, "Immersed boundary technique for turbulent flow simulations," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, pp. 331-347, 2003.
- [43] R. Mittal and G. Iaccarino, "IMMERSED BOUNDARY METHODS," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 37, pp. 239-261, 2005/01/01 2005.
- [44] R. Beyer and R. LeVeque, "Analysis of a One-Dimensional Model for the Immersed Boundary Method," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 29, pp. 332-364, 1992/04/01 1992.
- [45] M.-C. Lai and C. S. Peskin, "An Immersed Boundary Method with Formal Second-Order Accuracy and Reduced Numerical Viscosity," *Journal of Computational Physics*, vol. 160, pp. 705-719, 2000/05/20/ 2000.
- [46] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich, "Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field," *Journal of Computational Physics*, vol. 105, pp. 354-366, 1993/04/01/ 1993.
- [47] E. M. Saiki and S. Biringen, "Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow: Application of a Virtual Boundary Method," *Journal of Computational Physics*, vol. 123, pp. 450-465, 1996/02/01/ 1996.
- [48] P. Angot, C.-H. Bruneau, and P. Fabrie, "A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows," *Numerische Mathematik*, vol. 81, pp. 497-520, 1999/02/01 1999.
- [49] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, and J.-P. Caltagirone, "Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier–Stokes equations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 34, pp. 651-684, 2000/12/30 2000.
- [50] R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, and D. D. Joseph, "A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows," *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 25, pp. 755-794, 1999/08/01/ 1999.

- [51] X. Wang and W. K. Liu, "Extended immersed boundary method using FEM and RKPM," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 1305-1321, 2004/03/26/ 2004.
- [52] L. Zhang, A. Gerstenberger, X. Wang, and W. K. Liu, "Immersed finite element method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 2051-2067, 2004/05/28/ 2004.
- [53] X. Sheldon Wang, L. T. Zhang, and W. K. Liu, "On computational issues of immersed finite element methods," *Journal of Computational Physics*, vol. 228, pp. 2535-2551, 2009/04/20/ 2009.
- [54] X. S. Wang, "An iterative matrix-free method in implicit immersed boundary/continuum methods," *Computers & Structures*, vol. 85, pp. 739-748, 2007/06/01/ 2007.
- [55] J. Mohd-Yusof, "Combined Immersed Boundary/B-Spline Methods for Simulation of Flow in Complex Geometries," *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, pp. 317-328, 1997 1997.
- [56] E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof, "Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations," *Journal of Computational Physics*, vol. 161, pp. 35-60, 2000/06/10/ 2000.
- [57] M. Uhlmann, "An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 209, pp. 448-476, 2005/11/01/ 2005.
- [58] T. Kempe and J. Fröhlich, "An improved immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particle laden flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 231, pp. 3663-3684, 2012/05/01/ 2012.

- [59] S.-W. Su, M.-C. Lai, and C.-A. Lin, "An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary," *Computers & Fluids*, vol. 36, pp. 313-324, 2007/02/01/ 2007.
- [60] S. Wang and X. Zhang, "An immersed boundary method based on discrete stream function formulation for two- and three-dimensional incompressible flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 230, pp. 3479-3499, 2011/05/01/ 2011.
- [61] C. S. Peskin, "The immersed boundary method," in *Acta Numerica 2002*. vol. 11, A. Iserles, Ed., ed Cambridge: Cambridge University Press, 2002, pp. 479-518.
- [62] A. M. Roma, C. S. Peskin, and M. J. Berger, "An Adaptive Version of the Immersed Boundary Method," *Journal of Computational Physics*, vol. 153, pp. 509-534, 1999/08/10/ 1999.
- [63] X. Yang, X. Zhang, Z. Li, and G.-W. He, "A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations," *Journal of Computational Physics*, vol. 228, pp. 7821-7836, 2009/11/01/ 2009.
- [64] K. Taira and T. Colonius, "The immersed boundary method: A projection approach," *Journal of Computational Physics*, vol. 225, pp. 2118-2137, 2007/08/10/ 2007.
- [65] J. B. Perot, "An Analysis of the Fractional Step Method," *Journal of Computational Physics*, vol. 108, pp. 51-58, 1993/09/01/ 1993.
- [66] C. Ji, A. Munjiza, and J. J. R. Williams, "A novel iterative direct-forcing immersed boundary method and its finite volume applications," *Journal of Computational Physics*, vol. 231, pp. 1797-1821, 2012/02/20/ 2012.
- [67] Y.-H. Tseng and J. H. Ferziger, "A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry," *Journal of Computational Physics*, vol. 192, pp. 593-623, 2003/12/10/ 2003.

- [68] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F. M. Najjar, A. Vargas, and A. von Loebbecke, "A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries," *Journal of Computational Physics*, vol. 227, pp. 4825-4852, 2008/05/01/ 2008.
- [69] T. Ye, R. Mittal, H. S. Udaykumar, and W. Shyy, "An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries," *Journal of Computational Physics*, vol. 156, pp. 209-240, 1999/12/10/ 1999.
- [70] M. P. Kirkpatrick, S. W. Armfield, and J. H. Kent, "A representation of curved boundaries for the solution of the Navier–Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid," *Journal of Computational Physics*, vol. 184, pp. 1-36, 2003/01/01/ 2003.
- [71] Y. Cheny and O. Botella, "The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties," *Journal of Computational Physics*, vol. 229, pp. 1043-1076, 2010/02/20/ 2010.
- [72] M. Meyer, A. Devesa, S. Hickel, X. Y. Hu, and N. A. Adams, "A conservative immersed interface method for Large-Eddy Simulation of incompressible flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 229, pp. 6300-6317, 2010/09/01/ 2010.
- [73] H. S. Udaykumar, R. Mittal, P. Rampungoon, and A. Khanna, "A Sharp Interface Cartesian Grid Method for Simulating Flows with Complex Moving Boundaries," *Journal of Computational Physics*, vol. 174, pp. 345-380, 2001/11/20/ 2001.
- [74] H. S. Udaykumar, W. Shyy, and M. M. Rao, "ELAFINT: A MIXED EULERIAN–LAGRANGIAN METHOD FOR FLUID FLOWS WITH COMPLEX AND MOVING BOUNDARIES," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 22, pp. 691-712, 1996/04/30 1996.

- [75] H. S. Udaykumar, R. Mittal, and W. Shyy, "Computation of Solid–Liquid Phase Fronts in the Sharp Interface Limit on Fixed Grids," *Journal of Computational Physics*, vol. 153, pp. 535-574, 1999/08/10/ 1999.
- [76] X. Y. Hu, B. C. Khoo, N. A. Adams, and F. L. Huang, "A conservative interface method for compressible flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 219, pp. 553-578, 2006/12/10/ 2006.
- [77] R. LeVeque and Z. Li, "The Immersed Interface Method for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients and Singular Sources," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, pp. 1019-1044, 1994/08/01 1994.
- [78] R. LeVeque and Z. Li, "Immersed Interface Methods for Stokes Flow with Elastic Boundaries or Surface Tension," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 18, pp. 709-735, 1997/05/01 1997.
- [79] Z. Li and M.-C. Lai, "The Immersed Interface Method for the Navier–Stokes Equations with Singular Forces," *Journal of Computational Physics*, vol. 171, pp. 822-842, 2001/08/10/ 2001.
- [80] L. Lee and R. LeVeque, "An Immersed Interface Method for Incompressible Navier–Stokes Equations," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 25, pp. 832-856, 2003/01/01 2003.
- [81] M.-C. Lai and Z. Li, "A remark on jump conditions for the three-dimensional Navier-Stokes equations involving an immersed moving membrane," *Applied Mathematics Letters*, vol. 14, pp. 149-154, 2001/02/01/ 2001.
- [82] S. Xu and Z. J. Wang, "An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries," *Journal of Computational Physics*, vol. 216, pp. 454-493, 2006/08/10/ 2006.
- [83] S. Xu and Z. J. Wang, "A 3D immersed interface method for fluid–solid interaction," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 2068-2086, 2008/04/15/ 2008.

- [84] D. V. Le, B. C. Khoo, and J. Peraire, "An immersed interface method for viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries," *Journal of Computational Physics*, vol. 220, pp. 109-138, 2006/12/20/ 2006.
- [85] Z. Tan, K. M. Lim, and B. C. Khoo, "An immersed interface method for Stokes flows with fixed/moving interfaces and rigid boundaries," *Journal of Computational Physics*, vol. 228, pp. 6855-6881, 2009/10/01/ 2009.
- [86] W. W. Ren, J. Wu, C. Shu, and W. M. Yang, "A stream function–vorticity formulation-based immersed boundary method and its applications," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 70, pp. 627-645, 2012/10/20 2011.
- [87] C. Mimeau, F. Gallizio, G.-H. Cottet, and I. Mortazavi, "Vortex penalization method for bluff body flows," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 79, pp. 55-83, 2015/09/20 2015.
- [88] T. Colonius and K. Taira, "A fast immersed boundary method using a nullspace approach and multi-domain far-field boundary conditions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 2131-2146, 2008/04/15/ 2008.
- [89] A. Dupuis, P. Chatelain, and P. Koumoutsakos, "An immersed boundary–lattice-Boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder," *Journal of Computational Physics*, vol. 227, pp. 4486-4498, 2008/04/20/ 2008.
- [90] J. Favier, A. Revell, and A. Pinelli, "A Lattice Boltzmann–Immersed Boundary method to simulate the fluid interaction with moving and slender flexible objects," *Journal of Computational Physics*, vol. 261, pp. 145-161, 2014/03/15/ 2014.
- [91] J. Wu and C. Shu, "An improved immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating three-dimensional incompressible flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 229, pp. 5022-5042, 2010/07/01/ 2010.

- [92] J. Wu and C. Shu, "Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications," *Journal of Computational Physics*, vol. 228, pp. 1963-1979, 2009/04/01/ 2009.
- [93] Y. Wang, C. Shu, C. J. Teo, and J. Wu, "An immersed boundary-lattice Boltzmann flux solver and its applications to fluid–structure interaction problems," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 54, pp. 440-465, 2015/04/01/ 2015.
- [94] C. Allery, S. Guerin, A. Hamdouni, and A. Sakout, "Experimental and numerical POD study of the Coanda effect used to reduce self-sustained tones," *Mechanics Research Communications*, vol. 31, pp. 105-120, 2004/01/01/ 2004.
- [95] C. Allery, C. Beghein, and A. Hamdouni, "On investigation of particle dispersion by a POD approach," *International Applied Mechanics*, vol. 44, pp. 110-119, 2008/01/01 2008.
- [96] E. Liberge and A. Hamdouni, "Reduced order modelling method via proper orthogonal decomposition (POD) for flow around an oscillating cylinder," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 26, pp. 292-311, 2010/02/01/ 2010.
- [97] A. Rajabpour, F. Kowsary, and V. Esfahanian, "Reduction of the computational time and noise filtration in the IHCP by using the proper orthogonal decomposition (POD) method," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 35, pp. 1024-1031, 2008/10/01/ 2008.
- [98] Z. Luo, J. Zhu, R. Wang, and I. M. Navon, "Proper orthogonal decomposition approach and error estimation of mixed finite element methods for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 4184-4195, 2007/09/01/ 2007.
- [99] U. Galvanetto and G. Violaris, "Numerical investigation of a new damage detection method based on proper orthogonal decomposition," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, pp. 1346-1361, 2007/04/01/ 2007.

- [100] X. Amandolèse and C. Crémona, "Analysing fluid loadings on moving bluff bodies using proper orthogonal decomposition," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 20, pp. 577-587, 2005/05/01/ 2005.
- [101] T. K. Sengupta and S. Dey, "Proper orthogonal decomposition of direct numerical simulation data of by-pass transition," *Computers & Structures*, vol. 82, pp. 2693-2703, 2004/12/01/ 2004.
- [102] J. Burkardt, M. Gunzburger, and H.-C. Lee, "POD and CVT-based reduced-order modeling of Navier–Stokes flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 337-355, 2006/12/01/ 2006.
- [103] Q. Du and M. Gunzburger, "Grid generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 133, pp. 591-607, 2002/12/15/ 2002.
- [104] P. Vidal, L. Gallimard, and O. Polit, "Proper Generalized Decomposition and layer-wise approach for the modeling of composite plate structures," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, pp. 2239-2250, 2013/07/01/ 2013.
- [105] P. Vidal, L. Gallimard, and O. Polit, "Composite beam finite element based on the Proper Generalized Decomposition," *Computers & Structures*, vol. 102-103, pp. 76-86, 2012/07/01/ 2012.
- [106] P. Vidal, L. Gallimard, and O. Polit, "Shell finite element based on the Proper Generalized Decomposition for the modeling of cylindrical composite structures," *Computers & Structures*, vol. 132, pp. 1-11, 2014/02/01/ 2014.
- [107] P. Vidal, L. Gallimard, and O. Polit, "Assessment of a composite beam finite element based on the proper generalized decomposition," *Composite Structures*, vol. 94, pp. 1900-1910, 2012/04/01/ 2012.
- [108] P. Vidal, L. Gallimard, and O. Polit, "Robust layerwise C0 finite element approach based on a variable separation method for the modeling of composite and

sandwich plates," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 139, pp. 1-13, 2018/02/01/ 2018.

[109] A. Leygue and E. Verron, "A First Step Towards the Use of Proper General Decomposition Method for Structural Optimization," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 465-472, 2010/12/01 2010.

[110] C. Ghnatios and E. Hachem, "A stabilized mixed formulation using the proper generalized decomposition for fluid problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018/10/03/ 2018.

[111] C. Leblond and C. Allery, "A priori space–time separated representation for the reduced order modeling of low Reynolds number flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 274, pp. 264-288, 2014/06/01/ 2014.

[112] B. Mokdad, E. Prulière, A. Ammar, and F. Chinesta, "On the Simulation of Kinetic Theory Models of Complex Fluids Using the Fokker-Planck Approach," *Applied Rheology*, vol. 17/2, pp. 1-14, 2007 2007.

[113] J. Berger, M. Chhay, S. Guernouti, and M. Woloszyn, "Proper generalized decomposition for solving coupled heat and moisture transfer," *Journal of Building Performance Simulation*, vol. 8, pp. 295-311, 2015/09/03 2015.

[114] J. Berger, H. R. B. Orlande, and N. Mendes, "Proper Generalized Decomposition model reduction in the Bayesian framework for solving inverse heat transfer problems," *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 25, pp. 260-278, 2017/02/01 2017.

[115] M. A. Nasri, C. Robert, A. Ammar, S. El Arem, and F. Morel, "Proper Generalized Decomposition (PGD) for the numerical simulation of polycrystalline aggregates under cyclic loading," *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 346, pp. 132-151, 2018/02/01/ 2018.

[116] J. Chenevier, D. González, J. V. Aguado, F. Chinesta, and E. Cueto, "Reduced-order modeling of soft robots," *PLOS ONE*, vol. 13, p. e0192052, 2018.

- [117] S. González-Pintor, D. Ginestar, and G. Verdú, "Using proper generalized decomposition to compute the dominant mode of a nuclear reactor," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 57, pp. 1807-1815, 2013/04/01/ 2013.
- [118] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto, "Recent Advances and New Challenges in the Use of the Proper Generalized Decomposition for Solving Multidimensional Models," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 327-350, 2010 2010.
- [119] F. Chinesta, P. Ladeveze, and E. Cueto, "A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 18, p. 395, 2011/10/11 2011.
- [120] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar, "Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier–Stokes equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 230, pp. 1387-1407, 2011/02/20/ 2011.
- [121] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar, "Proper Generalized Decomposition method for incompressible Navier–Stokes equations with a spectral discretization," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, pp. 8145-8162, 2013/04/01/ 2013.
- [122] M. Ghasemi, "Spline-based DQM for multi-dimensional PDEs: Application to biharmonic and Poisson equations in 2D and 3D," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 73, pp. 1576-1592, 2017/04/01/ 2017.
- [123] Z. Shi, Y.-y. Cao, and Q.-j. Chen, "Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, pp. 5143-5161, 2012/11/01/ 2012.
- [124] A. J. Chorin, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Mathematics of Computation*, vol. 22, pp. 745-762, 1968.
- [125] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method," *Journal of Computational Physics*, vol. 48, pp. 387-411, 1982/12/01/ 1982.

- [126] C.-H. Bruneau and M. Saad, "The 2D lid-driven cavity problem revisited," *Computers & Fluids*, vol. 35, pp. 326-348, 2006/03/01/ 2006.
- [127] S.-G. Cai, "Computational fluid-structure interaction with the moving immersed boundary method," Université de Technologie de Compiègne, 2016.
- [128] B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, and B. Schönung, "Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 127, pp. 473-496, 2006.
- [129] J. Kim and P. Moin, "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 59, pp. 308-323, 1985/06/01/ 1985.
- [130] E. Erturk, "Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions," *Computers & Fluids*, vol. 37, pp. 633-655, 2008/07/01/ 2008.
- [131] S.-G. Cai, A. Ouahsine, J. Favier, and Y. Hoarau, "Moving immersed boundary method," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 85, pp. 288-323, 2017/10/20 2017.
- [132] D. J. Tritton, "Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 6, pp. 547-567, 2006.
- [133] M. Coutanceau and R. Bouard, "Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 79, pp. 231-256, 2006.
- [134] D. Calhoun, "A Cartesian Grid Method for Solving the Two-Dimensional Streamfunction-Vorticity Equations in Irregular Regions," *Journal of Computational Physics*, vol. 176, pp. 231-275, 2002/03/01/ 2002.
- [135] A. L. F. Lima E Silva, A. Silveira-Neto, and J. J. R. Damasceno, "Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed

boundary method," *Journal of Computational Physics*, vol. 189, pp. 351-370, 2003/08/10/ 2003.

[136] D. Russell and Z. Jane Wang, "A cartesian grid method for modeling multiple moving objects in 2D incompressible viscous flow," *Journal of Computational Physics*, vol. 191, pp. 177-205, 2003/10/10/ 2003.

[137] D. V. Le, B. C. Khoo, and K. M. Lim, "An implicit-forcing immersed boundary method for simulating viscous flows in irregular domains," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 2119-2130, 2008/04/15/ 2008.

[138] S. K. Kang and Y. A. Hassan, "A comparative study of direct-forcing immersed boundary-lattice Boltzmann methods for stationary complex boundaries," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 66, pp. 1132-1158, 2011/07/30 2011.

[139] H. DÜTsch, F. Durst, S. Becker, and H. Lienhart, "Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan–Carpenter numbers," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 360, pp. 249-271, 1998.

[140] E. Guilmineau and P. Queutey, "A NUMERICAL SIMULATION OF VORTEX SHEDDING FROM AN OSCILLATING CIRCULAR CYLINDER," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 16, pp. 773-794, 2002/08/01/ 2002.

[141] L. Zhu and C. S. Peskin, "Interaction of two flapping filaments in a flowing soap film," *Physics of Fluids*, vol. 15, pp. 1954-1960, 2003/07/01 2003.

[142] Y. Cheng and H. Zhang, "Immersed boundary method and lattice Boltzmann method coupled FSI simulation of mitral leaflet flow," *Computers & Fluids*, vol. 39, pp. 871-881, 2010/05/01/ 2010.

[143] B. E. Griffith, "On the Volume Conservation of the Immersed Boundary Method," *Communications in Computational Physics*, vol. 12, pp. 401-432, 2015.

[144] J. M. Stockie and B. R. Wetton, "Analysis of Stiffness in the Immersed Boundary Method and Implications for Time-Stepping Schemes," *Journal of Computational Physics*, vol. 154, pp. 41-64, 1999/09/01/ 1999.

[145] J. M. Stockie, "Analysis and computation of immersed boundaries, with application to pulp fibres," The University of British Columbia, 1997.

PHỤ LỤC A

Chương trình giải phương trình 2D Poisson bằng phương pháp PGD kết hợp với phương pháp sai phân hữu hạn:

```
% Tac gia:      Le Quoc Cuong (C. Le-Quoc or Le Quoc-Cuong)
% Don vi:      University of Technical Education Ho Chi Minh City
% email:       cuonglq.vietnam@gmail.com
% Muc dich:    Giai phuong trinh 2D Poisson
%-----
clc
clear all
close all
format long
tic
lx = 1;
ly = 1;
nx = 100;
ny = 100;
x = linspace(0, lx, nx+1);
dx = lx/nx;
y = linspace(0, ly, ny+1);
dy = ly/ny;
f = -8*pi^2*sin(2*pi*x')*sin(2*pi*y); % Ve phai cua phuong trinh Poisson
u_ex = sin(2*pi*x')*sin(2*pi*y);      % Loi giai chinh xac
tol_u = 10^(-8); % Dieu kien dung toan cuc
tol_RS = 10^(-8); % Dieu kien dung cua bien R va S
[X,Y,u] = PGD_Poisson2D(x,y,tol_u,tol_RS,f);
er=sqrt(sum(sum((u-u_ex).^2))/(nx*ny)); % Sai so
figure(1) % Hien thi loi giai PGD
surf(x,y,u');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('u_P_G_D')
title('PGD solution')
```

Chương trình PGD cho phương trình 2D Poisson:

```
function [X,Y,u,n]= PGD_Poisson2D(x,y,tol_u,tol_RS,f)
%% Dieu kien bien:  [1]:Dirichlet;    [2]: Neumann
Wbc = 1;           % Bien trai
Ebc = 1;           % Bien phai
Nbc = 1;           % Bien tren
Sbc = 1;           % Bien duoi

nx = length(x);
ny = length(y);
dx = x(2)-x(1);
dy = y(2)-y(1);

X = zeros(nx,1);
D2X = zeros(nx,1);
Y = zeros(1,ny);
D2Y = zeros(1,ny);
```

```

Saiso = 1;
n = 1;

CM_d2x = CMd2x_4order(X,dx); %% Matran tinh dao ham bac hai cua X
CM_d2y = CMd2x_4order(Y,dy); %% Matran tinh dao ham bac hai cua Y
% Tinh Xn va Yn
while saiso>=tol_u
    N_RS = 1;
    saisoRS = 1;
    S = randn(1,ny); % Khoi tao S0
    D2S = CM_d2y*S';D2S=D2S';
    S_old = zeros(1,ny);
    R_old = zeros(nx,1);
    while saisoRS>tol_RS
        %% Tinh ham R(x)
        anpha_S = trapz(y,S.^2);
        beta_S = trapz(y,S.*D2S);
        gamma_x = trapz(y,( repmat(S,nx,1).*f)')';
        anpha_Si = trapz(y,( repmat(S,n-1,1).*Y(1:n-1,:))')';
        beta_Si = trapz(y,( repmat(S,n-1,1).*D2Y(1:n-1,:))')';
        f1 = D2X(:,1:n-1)*anpha_Si;
        f2 = X(:,1:n-1)*beta_Si;
        fx = gamma_x-f1-f2;
        [R,D2R] = fdm_ODE2(anpha_S,beta_S,fx,CM_d2x,nx,Wbc,Ebc);
        %% Tinh ham S(y)
        anpha_R = trapz(x,R.^2);
        beta_R = trapz(x,R.*D2R);
        gamma_y = trapz(x, repmat(R,1,ny).*f);
        anpha_Ri = trapz(x, repmat(R,1,n-1).*X(:,1:n-1));
        beta_Ri = trapz(x, repmat(R,1,n-1).*D2X(:,1:n-1));
        f1 = anpha_Ri*D2Y(1:n-1,:);
        f2 = beta_Ri*Y(1:n-1,:);
        fy = gamma_y-f1-f2;
        [S,D2S] = fdm_ODE2(anpha_R,beta_R,fy',CM_d2y,ny,Nbc,Sbc);
        S = S';D2S = D2S';
        saisoRS = norm(R*S-R_old*S_old);
        S_old = S;
        R_old = R;
        N_RS = N_RS+1;
    end
    %% Gan gia tri X(n+1) va Y(n+1)
    X(:,n) = (R);D2X(:,n) = (D2R);
    Y(n,:) = (S);D2Y(n,:) = (D2S);
    %% Tinh gia tri nghiem cua phuong trinh toan cuc
    u = X*Y;
    %% Gia tri u o buoc lap thu n
    u_n=R*S;
    %% Tinh sai so
    if n==1
        saiso=norm(D2X*Y+X*D2Y-f)/norm(f);
    else
        saiso = sqrt(trapz(x,trapz(y,(u_n).^2,1),2))/...
            sqrt(trapz(x,trapz(y,(u).^2,1),2));
    end
    n = n+1;
end
end

```

Chương trình tính ma trận hệ số cho đạo hàm bậc hai của hàm f theo biến x :

```
function CM = CMd2x_4order(f,h)
n = length(f);
CM = zeros(n);
%% Ap dung sai phan trung tam bac 4 cho nhung diem ben trong
for i=3:n-2
    CM(i,i-2) = -1/12;
    CM(i,i-1) = 4/3;
    CM(i,i) = -5/2;
    CM(i,i+1) = 4/3;
    CM(i,i+2) = -1/12;
end
%% Ap dung so do sai phan tien bac 4 cho cac diem i=1,2
for i=1:2
    CM(i,i) = 15/4;
    CM(i,i+1) = -77/6;
    CM(i,i+2) = 107/6;
    CM(i,i+3) = -13;
    CM(i,i+4) = 61/12;
    CM(i,i+5) = -5/6;
end
%% Ap dung so do sai phan lui bac 4 cho cac diem i=n-1,n
for i=n-1:n
    CM(i,i) = 15/4;
    CM(i,i-1) = -77/6;
    CM(i,i-2) = 107/6;
    CM(i,i-3) = -13;
    CM(i,i-4) = 61/12;
    CM(i,i-5) = -5/6;
end
CM = CM*(1/h*h);
```

Chương trình giải phương trình vi phân một chiều:

```
function [R,D2R] = fdm_ODE2(a,b,f,CM2,n,firstbc,endbc)
Ix = speye(n);
D2x=CM2;
B = f;
A = a*D2x+b*Ix;
for i=1:n
    if i == 1
        if firstbc==1
            A(i,:)=0;
            A(i,i) = 1;
            B(i) = 0;
        elseif firstbc==2
            A(i,:)=0;
            A(i,i) = -3/2;
            A(i,i+1) = 2;
            A(i,i+2) = -1;
            B(i) = 0;
        end
    elseif i == n
        if endbc==1
```

```
A(i,:) = 0;
A(i,i) = 1;
B(i) = 0;
elseif endbc==2
    A(i,:) = 0;
    A(i,i) = -3/2;
    A(i,i-1) = 2;
    A(i,i-2) = -1;
    B(i) = 0;
end
end
end
R = inv(A)*B;
D2R = D2x*R;
```

Phụ lục B

Chương trình mô phỏng bài toán dòng chảy nhớt không nén qua trụ tròn bằng phương pháp IB kết hợp với phương pháp PGD:

```
% Tac gia: Le Quoc Cuong (LE Quoc-Cuong)
% Email: cuonglq.vietnam@gmail.com
% Muc dich: Giai bai toan dong chay nhot khong nen qua tru trong bang
%           phuong phap IB ket hop voi phuong phap PGD
%-----
clear all;close all;clc;
format long
ly = 1.6;
lx = 3.2;
nx = 256*2;
ny = 256*1;
hy = ly/ny;
hx = lx/nx;
h = hx;
x = linspace(0,lx,nx+1);
y = linspace(0,ly,ny+1);

vect = 1.0;
rho = 1.0;
Re = 100;
D = 0.1;
nuy = (rho*vect*D)/Re;

K = 3000;
xc = 0.8;
yc = ly/2;
Nb = round(pi*D/h);

dtheta = 0;
[X,X1,kp,km,dtheta,Xe] = body(Nb,D,xc,yc,h);
lp = sqrt((X(kp,1)-X(:,1)).^2+(X(kp,2)-X(:,2)).^2);
lm = sqrt((X(:,1)-X(km,1)).^2+(X(:,2)-X(km,2)).^2);

U = zeros(nx+1,ny+2);
V = zeros(nx+2,ny+1);
USTAR = zeros(nx+1,ny+2);
VSTAR = zeros(nx+2,ny+1);
U(1,2:end-1) = vect;

dt = 0.0001;
t = dt;
tf = 180;
ii = 0;
while (t<=tf)
    ii = ii+1;
    %% Tinh luc tren bien nhung
    F = K*(Xe-X); %Lai & Peskin
    Fd = 0;
    Fl = 0;
    for i = 1:(size(F,1))
```

```

    Fd = Fd+F(i,1)*(lp(i));
    Fl = Fl+F(i,2)*(lp(i));
end
Fd = -Fd;
Fl = -Fl;
Cd = (2*Fd)/(rho*(vect^2)*D);
Cl = (2*Fl)/(rho*(vect^2)*D);
C(ii,1) = (t*vect)/D;
C(ii,2) = Cd;
C(ii,3) = Cl;
%% Phan bo luc tren bien nhung den cac diem luoi luu chat
[fx,fy] = spread_force(F,Xe,nx,ny,h,Nb,lp);
gamma = min(1.2*dt*max(max(max(abs(U)))/hx,max(max(abs(V)))/hy),1);
Ua = avg(U)'; Ud = diff(U)'/2;
Va = avg(V); Vd = diff(V)/2;
UVx = diff(Ua.*Va-gamma*abs(Ua).*Vd)/hx;
UVy = diff((Ua.*Va-gamma*Ud.*abs(Va))')'/hy;
Ua = avg(U(:,2:end-1)); Ud = diff(U(:,2:end-1))/2;
Va = avg(V(2:end-1,:))'; Vd = diff(V(2:end-1,:))'/2;
U2x = diff(Ua.^2-gamma*abs(Ua).*Ud)/hx;
V2y = diff((Va.^2-gamma*abs(Va).*Vd)')'/hy;
USTAR(2:nx,2:ny+1) = U(2:nx,2:ny+1)-dt*(UVy(2:end-1,:)+U2x);
VSTAR(2:nx+1,2:ny) = V(2:nx+1,2:ny)-dt*(UVx(:,2:end-1)+V2y);
Uxx = diff(U,2,1)/hx/hx; Uyy = diff(U,2,2)/hy/hy;
Vxx = diff(V,2,1)/hx/hx; Vyy = diff(V,2,2)/hy/hy;
%% Tinh van toc trung gian
USTAR(2:nx,2:ny+1) = USTAR(2:nx,2:ny+1)+((dt*nuy)/rho)*...
    (Uxx(:,2:end-1)+Uyy(2:end-1,:));
VSTAR(2:nx+1,2:ny) = VSTAR(2:nx+1,2:ny)+((dt*nuy)/rho)*...
    (Vxx(:,2:end-1)+Vyy(2:end-1,:));
USTAR(2:nx,2:ny+1) = USTAR(2:nx,2:ny+1)+(dt/rho)*fx;
VSTAR(2:nx+1,2:ny) = VSTAR(2:nx+1,2:ny)+(dt/rho)*fy;
%% Ap dat dieu kien bien cho van toc
USTAR(1,2:ny+1) = vect; % (u*=uinflow)
USTAR(nx+1,2:ny+1) = USTAR(nx,2:ny+1); % (du*/dx=0)
USTAR(1:nx+1,1) = USTAR(1:nx+1,2); % (du*/dy=0)
USTAR(1:nx+1,ny+2) = USTAR(1:nx+1,ny+1); % (du*/dy=0)

VSTAR(2:nx+1,1) = 0; % (v*=0)
VSTAR(2:nx+1,ny+1) = 0; % (v*=0)
VSTAR(1,1:ny+1) = VSTAR(2,1:ny+1); % (dv*/dx=0)
VSTAR(nx+2,1:ny+1) = VSTAR(nx+1,1:ny+1); % (dv*/dx=0)
%% Giai phuong trinh Poisson ap suat bang phuong phap PGD
rhsP = diff(USTAR(1:nx+1,2:ny+1))/hx+diff(VSTAR(2:nx+1,1:ny+1)')'/hy;
rhsP = (rho/dt)*rhsP;
tol_p = 10^-5;
tol_RS = 10^-8;
[Px,Py,E,n] = PGD_Poisson2D(x,y,tol_p,tol_RS,rhsP);
P = Px*Py';
%% Cap nhat van toc o buoc thoi gian thu (n+1)
U(2:nx,2:ny+1) = USTAR(2:nx,2:ny+1)-(dt/rho)*diff(P)/hx;
V(2:nx+1,2:ny) = VSTAR(2:nx+1,2:ny)-(dt/rho)*diff(P)'/hy;
U(1,2:ny+1) = vect; % (u*=uinflow)
U(nx+1,2:ny+1) = U(nx,2:ny+1); % (du*/dx=0)
U(1:nx+1,1) = U(1:nx+1,2); % (du*/dy=0)
U(1:nx+1,ny+2) = U(1:nx+1,ny+1); % (du*/dy=0)

```

```

V(2:nx+1,1) = 0; % (v*=0)
V(2:nx+1,ny+1) = 0; % (v*=0)
V(1,1:ny+1) = V(2,1:ny+1); % (dv*/dx=0)
V(nx+2,1:ny+1) = V(nx+1,1:ny+1); % (dv*/dx=0)

Ui = avg(USTAR(1:nx+1,2:ny+1));
Vi = (avg(VSTAR(2:nx+1,1:ny+1)'))';
%% Noi suy van toc tren bien nhung
Uib = interpolation(Ui,Vi,Xe,h,Nb);
%% Cap nhat vi tri bien nhung tai buoc thoi gian (n+1)
X = X+(dt)*Uib;
t = t+dt;
end

```

Chương trình phân bố lực tại các điểm trên biên nhúng đến các điểm lưới xung quanh:

```

function [fx,fy]=spread_force(F,X,nx,ny,h,Nb,lp)
fx = zeros(nx,ny);
fy = zeros(nx,ny);

for k=1:Nb
c=lp(k)/(h*h);
s=X(k,+)/h;
i=floor(s);
r=s-i;
i1=i(1):i(1)+3;
i2=i(2):i(2)+3;
w=phi1(r(1)).*phi2(r(2));
fx(i1,i2)=fx(i1,i2)+(c*F(k,1))*w;
fy(i1,i2)=fy(i1,i2)+(c*F(k,2))*w;
end
fx = avg(fx);
fy = (avg(fy'))';

```

Chương trình nội suy vận tốc tại các điểm trên biên nhúng:

```

function Ux=interpolation(U,V,X,h,Nb)

Ux=zeros(Nb,2);
for k=1:Nb
s=X(k,+)/h;
i=floor(s);
r=s-i;
i1=i(1):i(1)+3;
i2=i(2):i(2)+3;
w=phi1(r(1)).*phi2(r(2));
Ux(k,1)=sum(sum(w.*U(i1,i2)));
Ux(k,2)=sum(sum(w.*V(i1,i2)));
end

```